# Neuronové sítě 1 - Umělý neuron

18NES1 - 2. hodina, LS 2024/25

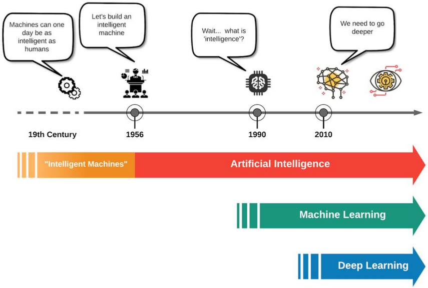
Zuzana Petříčková

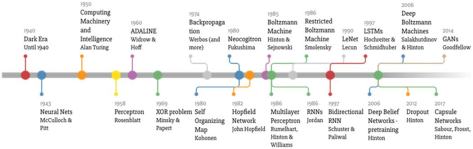
20. února 2025

# Co jsme probírali minule

- Úvod do problematiky: umělá inteligence a strojové učení
- Strojové učení - základní pojmy
- Umělé neuronové sítě - stručná historie

https://www.codesofinterest.com/p/build-deeper.html




Mourtzis, Dimitris & Angelopoulos, John. (2020). An intelligent framework for modelling and simulation of artificial neural networks (ANNs) based on augmented reality. International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 111. 10.1007/s00170-020-06192-y.

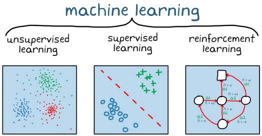
# Opakování – Strojové učení

## Princip

- počítačový systém se ,,vytváří sám", tj. učí se na základě dat (trénovací množina) nebo předchozích zkušeností

## Metody učení

- **Učení s učitelem (supervised learning)**
  - trénovací množina ve tvaru [*vstup, požadovaný výstup*]
- **Učení bez učitele (unsupervised learning, samoorganizace)**
  - trénovací množina ve tvaru [*vstup*]
- **Zpětnovazebné učení (reinforcement learning)**
  - program se učí optimální strategii na základě předchozích zkušeností

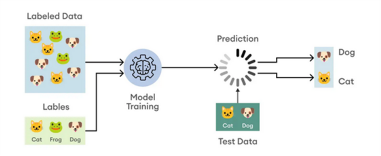



https://www.mathworks.com/discovery/reinforcement-learning.html

# Opakování – Strojové učení

**Učení s učitelem (supervised learning) - typy úloh:**

- **Klasifikace:** predikce třídy (kategorie)

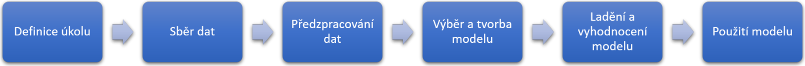



- **Regrese:** predikce numerické hodnoty (cena, teplota, sklon písma,. . . )


- **Učení strukturovaných dat** (např. věty v přirozeném jazyce)

# Opakování – Strojové učení

## Typický průběh řešení úlohy strojového učení




- Předzpracování dat
  - převedení dat do formátu, se kterým se bude modelu strojového učení nejlépe pracovat
  - např. výběr příznaků
- Učení modelu
  - jaký typ modelu? (záleží na problému)
  - jaký model daného typu? (volba vhodných parametrů)
- Vyhodnocení modelu – nejlépe na nových datech

# Opakování – Stručná historie oboru umělých neuronových sítí

**Vývoj probíhal ve vlnách:**

- Střídala se období rozkvětu oboru a velkých očekávání a následného zklamání a útlumu

**Zásadní období:**

- 1940 – 1960 : první teoretické základy
- 1960 – 1970 : první boom - období „jednoho neuronu"
- 1970 – 1980 : první „Neuronová zima"
- 1980 – 1990 : druhý boom - období „mělkých" neuronových sítí
- 1990 – 2000 : postupné zklidnění
- 2000 – 2010 : druhá „Neuronová zima"
- 2010 – současnost : třetí boom - období „hlubokých" neuronových sítí

# Dnešní hodina: jeden neuron

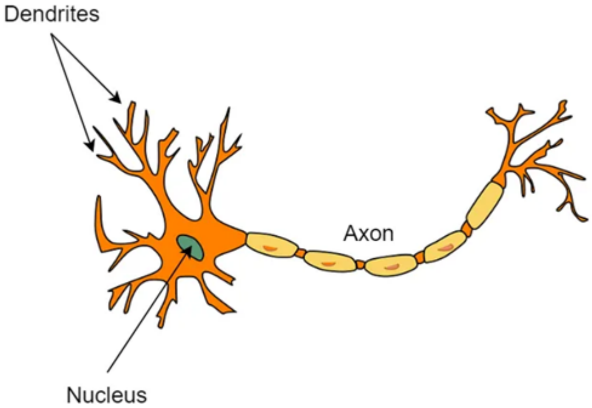
**Dnes:**

1. Od biologického neuronu k umělému
2. Nejstarší modely umělých neuronů: Culloch and Pitts neurons (1943), Perceptrons (Rosenblatt, 1955)
3. Perceptron a reprezentace logických funkcí

**Příští týden:**

1. Perceptronová síť – logický prahový obvod
2. Geometrická interpretace perceptronu, lineární separabilita
3. Perceptron a jeho algoritmy učení

# Model biologického neuronu




**Biologický neuron**

- základní stavební jednotka biologické neuronové sítě
- výstup závisí na vstupech neuronu a jejich zpracování uvnitř těla neuronu

# Model biologického neuronu

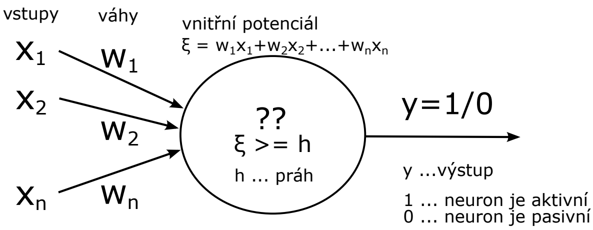
**Biologická neuronová síť**

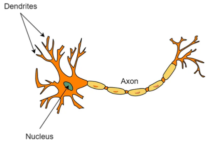
- neurony jsou vzájemně propojeny do sítí
  - axony se pomocí synapsí napojují na dendrity dalších neuronů
  - synapse se vytvářejí během celého života – **učení, paměť**

# Paměť

- **Krátkodobý paměťový mechanismus**
  - založen na cyklickém oběhu vzruchů v neuronových sítích
  - fixace informace za cca 30 s
- **Střednědobý paměťový mechanismus**
  - založen na změnách synapsí a vah neuronů
  - uchování informace v řádu hodin až dnů
  - klíčovou roli hraje hipokampus
- **Dlouhodobý paměťový mechanismus**
  - klíčovou roli pro dlouhodobou změnu synapsí hrají bílkoviny v jádrech neuronů
  - uchování informace až celý život

# Od biologického neuronu k umělému neuronu:

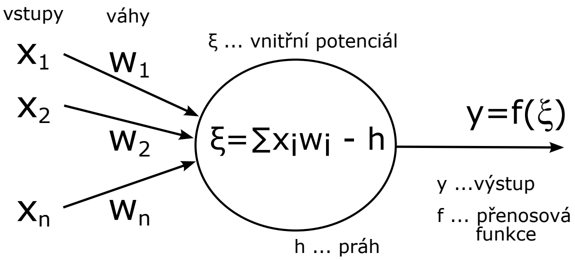



## Model neuronu:

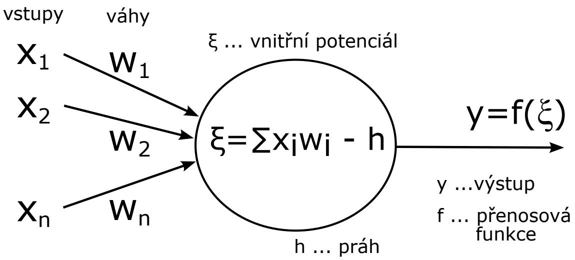
- vstupy $x_1, \ldots, x_n$ (0 nebo 1)
- váhy vstupů $w_1, \ldots, w_n$,
- práh $h$
- vnitřní potenciál ... vážený součet vstupů
  $\xi = w_i x_i + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$
- výstup 1 nebo 0 (v závislosti na tom, zda je vnitřní potenciál větší než práh nebo ne)

# Matematický model neuronu - formálněji




- parametry neuronu:
  - vektor vah $\vec{w} = (w_1, ..., w_n) \in R^n$,
  - práh $h \in R$
  - přenosová funkce $f : R \to R$
- neuron pro vstup $\vec{x} \in R^n$ spočte výstup $y \in R$ jako hodnotu přenosové funkce $f_{\vec{w},h}(\vec{x})$

# Matematický model neuronu - formálněji




**Výpočet výstupu neuronu:**

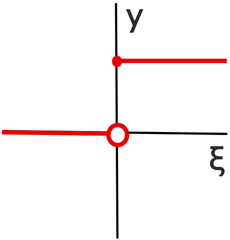
- vnitřní potenciál: $\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i.x_i - h = \vec{w}\vec{x}^T - h$
- výstup: $y = f(\xi)$

# Matematický model neuronu - formálněji

- používaná terminologie vychází z nejstarších modelů neuronu: Perceptron (Rosenblatt, 1955), Culloch and Pitts neurons (1943)
- oba modely používaly skokovou přenosovou funkci

**Skoková přenosová funkce:**

- $f(\xi) = 1$ pro $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq h$, tj.
  $\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - h \geq 0$
  ... neuron je **aktivní**
- $f(\xi) = 0$ pro $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i < h$, tj.
  $\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - h < 0$
  ... neuron je **pasivní**



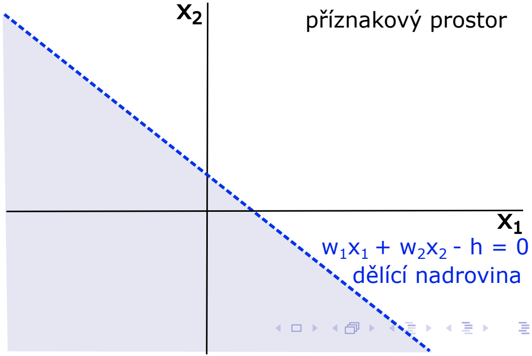
# Matematický model neuronu

## Geometrická interpretace umělého neuronu

- vstupy neuronu si představme jako body v n-rozměrném Euklidovském prostoru (vstupní, příznakový prostor)
- položme vnitřní potenciál neuronu $\xi = 0$ a získáme rovnici dělící nadroviny

$$\xi = w_1 x_1 + w_2 x_2 - h = 0$$

$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 + \frac{h}{w_2}$$



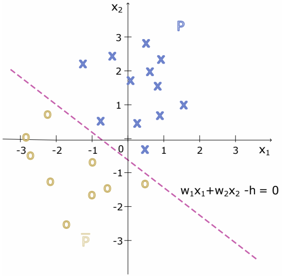
# Perceptron (Rosenblatt, 1955) , Culloch and Pitts neurons (1943)

→ perceptron může sloužit jako **lineární klasifikátor:** klasifikuje vzory do dvou tříd (P a $\overline{P}$).

- **lineární:** hranicí mezi třídami je nadrovina $w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n - h = 0$: bod, přímka, rovina,...

**Skoková přenosová funkce:**

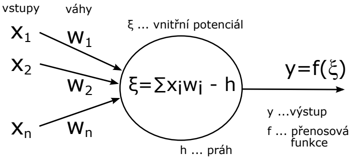
- $f(\xi) = 1$ pro $\sum_{i=1}^{n} w_i . x_i \geq h$, tj. $\xi \geq 0$
  ... neuron je **aktivní** (třída P)
- $f(\xi) = 0$ pro $\sum_{i=1}^{n} w_i . x_i < h$, tj. $\xi < 0$
  ... neuron je **pasivní** (třída $\overline{P}$)



# Culloch and Pitts neurons (1943)

**Binární varianta:**

- binární vstupy: $x_i \in \{0, 1\}$
- binární výstupy: $y \in \{0, 1\}$
- váhy: $w_i \in \{-1, 1\}$
- skoková přenosová funkce




**Bipolární varianta:**

- bipolární vstupy: $x_i \in \{-1, 1\}$
- bipolární výstupy: $y \in \{-1, 1\}$
- váhy: $w_i \in \{-1, 1\}$
- skoková přenosová funkce

$\rightarrow$ využití: reprezentace logických funkcí (AND, OR, NOT,...) ... ukážeme si za chvilku

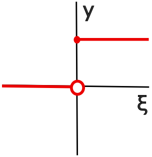
- **nevýhoda**: pro model neexistoval učící algoritmus (až později ... hebbovské učení)

# Perceptrony (Rosenblatt, 1955)

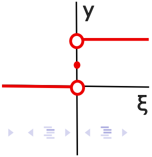
- reálné vstupy ... $x_i \in R$
- reálné váhy a prahy ... $w_i \in R$
- výstupy:
  - **binární** ... $y \in \{0, 1\}$
  - **bipolární** ... $y \in \{-1, 1\}$

**Varianty skokové přenosové funkce pro binární perceptron:**

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \xi \geq 0 \quad \text{... neuron je aktivní} \\ 0 & \text{pro } \xi < 0 \quad \text{... neuron je pasivní} \end{cases}$$




$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \xi > 0 \quad \text{.. neuron je aktivní} \\ 0.5 & \text{pro } \xi = 0 \quad \text{... neuron je tichý} \\ 0 & \text{pro } \xi < 0 \quad \text{... neuron je pasivní} \end{cases}$$



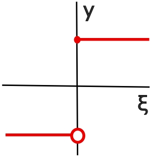

$\rightarrow$ funkce **signum** (bsign)

# Perceptrony (Rosenblatt, 1955)

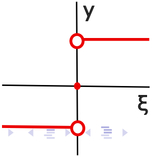
- reálné vstupy ... $x_i \in R$
- reálné váhy ... $w_i \in R$ a prahy
- výstupy:
  - **binární** ... $y \in \{0, 1\}$
  - **bipolární** ... $y \in \{-1, 1\}$

**Varianty skokové přenosové funkce pro bipolární perceptron:**

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \xi \geq 0 \quad \text{... neuron je aktivní} \\ -1 & \text{pro } \xi < 0 \quad \text{... neuron je pasivní} \end{cases}$$

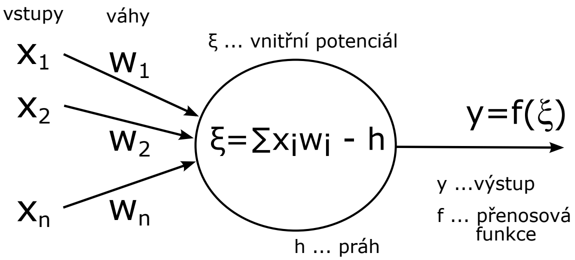



$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \xi > 0 \quad \text{... neuron je aktivní} \\ 0 & \text{pro } \xi = 0 \quad \text{... neuron je tichý} \\ -1 & \text{pro } \xi < 0 \quad \text{... neuron je pasivní} \end{cases}$$




→ funkce **signum** (sign)

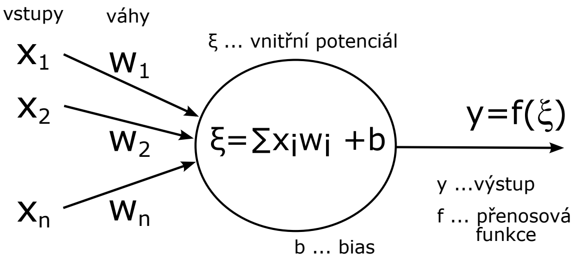
# Matematický model neuronu - původní definice




**Klasická definice: práh h**

- vnitřní potenciál: $\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i.x_i - h = \vec{w}\vec{x}^T - h$
- výstup: $y = f(\xi)$

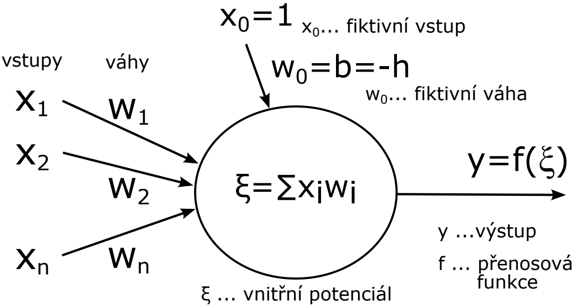
# Matematický model neuronu - moderní definice




**Alternativní definice: práh → bias**

- vnitřní potenciál: $\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i.x_i + b = \vec{w}\vec{x}^T + b$
- výstup: $y = f(\xi)$

# Matematický model neuronu - „maticová" definice




**Alternativní definice: zavedení fiktivního vstupu**

- rozšířený příznakový prostor ... $\vec{x} = (x_0 = 1, x_1, ..., x_n)$
- rozšířený prostor vah ... $\vec{w} = (w_0 = b = -h, w_1, ..., w_n)$
- vnitřní potenciál: $\xi = \sum_{i=0}^{n} w_i.x_i = \vec{w}\vec{x}^T$
- výstup: $y = f(\xi)$

# Neuronové sítě 1 - hodina 2: Umělý neuron

# Perceptron a reprezentace logických funkcí

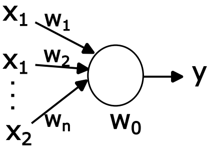
**Pomocí perceptronu lze realizovat základní logické funkce**

- NOT (negace)
- ID (identita)
- AND (konjunkce)
- OR (disjunkce)

$\rightarrow$ z perceptronů můžeme složit **logický prahový obvod**
... reprezentace libovolných logických (booleovských) funkcí

# Perceptron a reprezentace logických funkcí

**Budeme uvažovat následující model perceptronu:**




$$\xi = \vec{w} \cdot \vec{x}^T = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i$$

$$= w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

## Binární perceptron

- vstupy: $x_i \in \{0, 1\}$
- výstupy: $y \in \{0, 0.5, 1\}$
- $y = f(\xi) = bsign(\xi)$

$$bsign(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \xi > 0 \\ 0.5 & \text{pro } \xi = 0 \\ 0 & \text{pro } \xi < 0 \end{cases}$$

## Bipolární perceptron

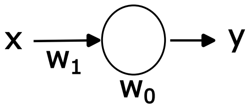
- vstupy: $x_i \in \{-1, +1\}$
- výstupy: $y \in \{-1, 0, +1\}$
- $y = f(\xi) = sign(\xi)$

$$sign(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \xi > 0 \\ 0 & \text{pro } \xi = 0 \\ -1 & \text{pro } \xi < 0 \end{cases}$$

# Logické funkce – NOT (negace)

**bipolární model**

| x | $y = \neg x$ |
|---|---|
| -1 | 1 |
| 1 | -1 |




$$y = sign(w_0 + w_1 x)$$

**binární model**

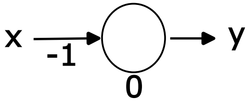
| x | $y = \neg x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

- jak zvolíme $w_0$ a $w_1$ v případě bipolárního modelu?
- a jak v případě binárního modelu?

# Logické funkce – NOT (negace)

**bipolární model**

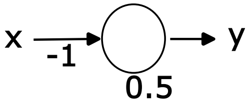
| x | $y = \neg x$ |
|---|---|
| -1 | 1 |
| 1 | -1 |




$$y = sign(w_0 + w_1 x) = sign(-x)$$

**binární model**

| x | $y = \neg x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

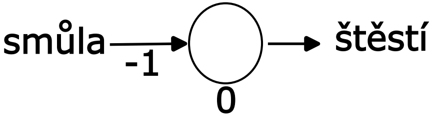



$$y = bsign(w_0 + w_1 x) = bsign(0.5 - x)$$

**Otázka**: Napadly by vás i další řešení?

# Logické funkce – NOT (negace)

**Příklad:** štěstí $= \neg$ smůla



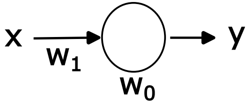
# Logické funkce – ID (identita)

**bipolární model**

| x | y = x |
|---|---|
| -1 | -1 |
| 1 | 1 |

**binární model**

| x | y = x |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |



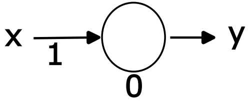

$$y = sign(w_0 + w_1 x)$$

- jak zvolíme $w_0$ a $w_1$ v případě bipolárního modelu?
- a jak v případě binárního modelu?

# Logické funkce – ID (identita)

**bipolární model**

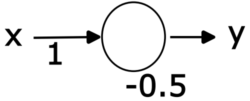
| x | y = x |
|---|---|
| -1 | -1 |
| 1 | 1 |




$$y = sign(w_0 + w_1 x) = sign(x)$$

**binární model**

| x | y = x |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |



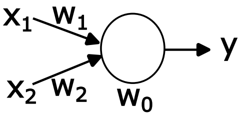

$$y = bsign(w_0 + w_1 x) = bsign(-0.5 + x)$$

→ není co řešit

# Logické funkce – AND (konjunkce)

## bipolární model

| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \wedge x_2$ |
|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | +1 | -1 |
| +1 | -1 | -1 |
| +1 | +1 | +1 |




## binární model

| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \wedge x_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

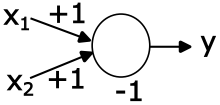
$$y = sign(w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2)$$

- jak zvolíme $w_0$, $w_1$ a $w_2$ v případě bipolárního modelu?
- a jak v případě binárního modelu?

# Logické funkce –AND (konjunkce)

**bipolární model**

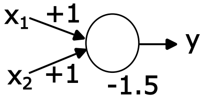
| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \wedge x_2$ |
|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | $+1$ | -1 |
| $+1$ | -1 | -1 |
| $+1$ | $+1$ | $+1$ |




$$y = sign(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$$
$$= sign(-1 + x_1 + x_2)$$

**binární model**

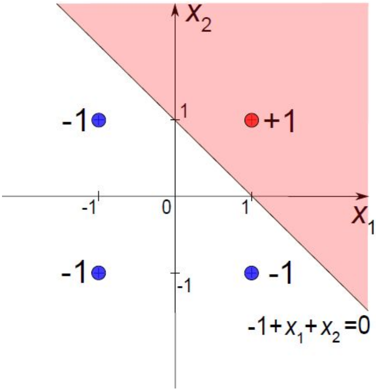
| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \wedge x_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



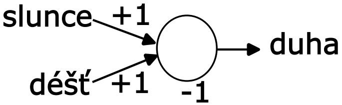

$$y = bsign(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$$
$$= bsign(-1.5 + x_1 + x_2)$$

**Otázka:** Mohla by být i další řešení?

# Logické funkce – AND (konjunkce)




**Příklad:** duha $=$ slunce $\wedge$ déšť

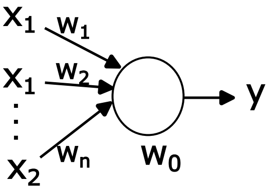



(bipolární model)

# Logické funkce – AND (konjunkce)

**jak nastavíme váhy v obecném případě?** ...

$y = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$

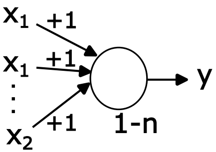



$$y = sign(w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i)$$

# Logické funkce – AND (konjunkce)

$$y = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$$

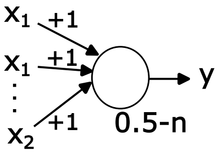
**bipolární model**




$$y = sign(w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i)$$

$$= sign(1 - n + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

**binární model**



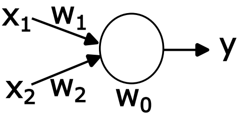

$$y = bsign(w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i)$$

$$= bsign(0.5 - n + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

# Logické funkce – OR (disjunkce)

**bipolární model**

| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \vee x_2$ |
|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | +1 | +1 |
| +1 | -1 | +1 |
| +1 | +1 | +1 |




**binární model**

$$y = sign(w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2)$$

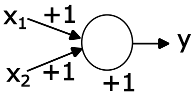
| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \vee x_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

- jak zvolíme $w_0$, $w_1$ a $w_2$ v případě bipolárního modelu?
- a jak v případě binárního modelu?

# Logické funkce – OR (disjunkce)

## bipolární model

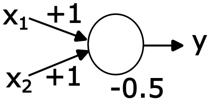
| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \vee x_2$ |
|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | +1 | +1 |
| +1 | -1 | +1 |
| +1 | +1 | +1 |




$$
\begin{aligned}
y &= sign(w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2) \\
&= sign(1 + x_1 + x_2)
\end{aligned}
$$

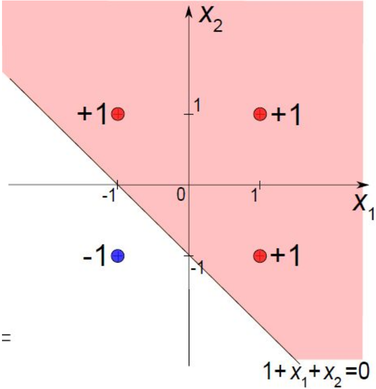
## binární model

| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \vee x_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

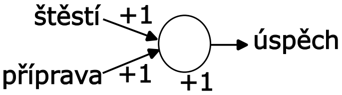



$$
\begin{aligned}
y &= bsign(w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2) \\
&= bsign(-0.5 + x_1 + x_2)
\end{aligned}
$$

# Logické funkce – OR (disjunkce)




**Příklad:** úspěch = štěstí $\vee$ příprava

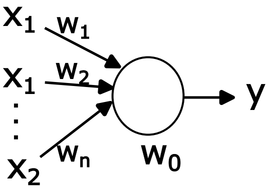



(bipolární model)

# Logické funkce – OR (disjunkce)

**jak nastavíme váhy v obecném případě?** ...

$y = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$

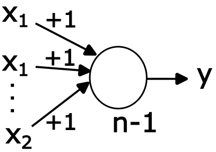



$$y = sign(w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i)$$

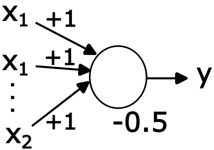
# Logické funkce – OR (disjunkce)

$y = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$

**bipolární model**




**binární model**



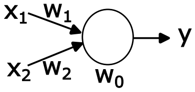

$$y = sign(w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i)$$
$$= sign(n - 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$y = bsign(w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i)$$
$$= bsign(-0.5 + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

# Logické funkce – Exkluzivní OR (XOR)

**bipolární model**

| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \otimes x_2$ |
|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | +1 | +1 |
| +1 | -1 | +1 |
| +1 | +1 | -1 |




$$y = sign(w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2)$$

**binární model**

| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \otimes x_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

- jak zvolíme $w_0$, $w_1$ a $w_2$ v případě bipolárního modelu?
- a jak v případě binárního modelu?

# Logické funkce – Exkluzivní OR (XOR)

**bipolární model**

| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \otimes x_2$ |
|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | $+1$ | $+1$ |
| $+1$ | -1 | $+1$ |
| $+1$ | $+1$ | -1 |

$$1 \ldots w_0 - w_1 - w_2 < 0$$
$$2 \ldots w_0 - w_1 + w_2 > 0$$
$$3 \ldots w_0 + w_1 - w_2 > 0$$
$$4 \ldots w_0 + w_1 + w_2 < 0$$

sečteme 1. a 4., 2. a 3.:

$$2w_0 < 0$$
$$2w_0 > 0$$

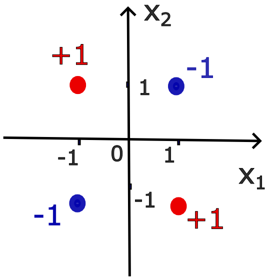
$\rightarrow$ spor

$$sign(w_0 - w_1 - w_2) = -1$$
$$sign(w_0 - w_1 + w_2) = +1$$
$$sign(w_0 + w_1 - w_2) = +1$$
$$sign(w_0 + w_1 + w_2) = -1$$

**Závěr:** Logickou funkci XOR nemůžeme realizovat jedním perceptronem.

# Logické funkce – Exkluzivní OR (XOR)

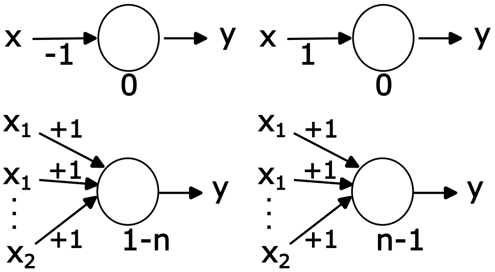
- XOR nelze realizovat jedním perceptronem




- Ale: XOR by mohlo jít realizovat pomocí více perceptronů (logického prahového obvodu)

# Logický prahový obvod

- pomocí perceptronů pro NOT, ID, AND a OR můžeme sestavit složitější logické funkce




→ stačí je poskládat vhodně za sebe (do neuronové sítě, konkrétně do logického prahového obvodu)
AND realizuje průnik konvexních útvarů a OR jejich sjednocení

# Logický prahový obvod

**Exkluzivní OR (XOR) - dobrovolný domácí úkol do příště**

1. XOR můžeme pomocí základních logických operací (AND, OR, NOT) reprezentovat různě, zvládnete navrhnout několik různých způsobů?
2. Navrhněte co nejmenší neuronovou síť, která bude reprezentovat XOR. Kolik bude obsahovat neuronů?

| $x_1$ | $x_2$ | $y = x_1 \otimes x_2$ |
|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | $+1$ | $+1$ |
| $+1$ | -1 | $+1$ |
| $+1$ | $+1$ | -1 |