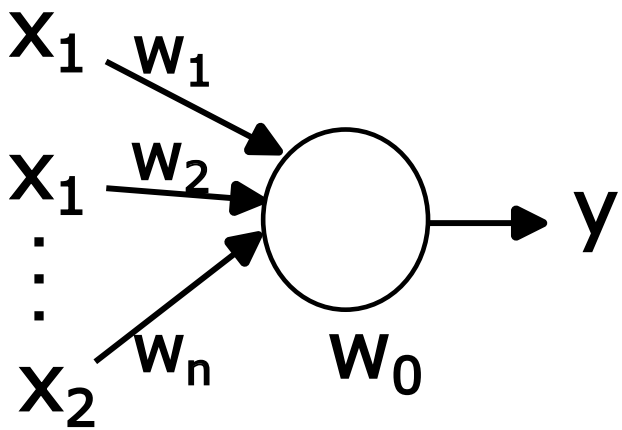
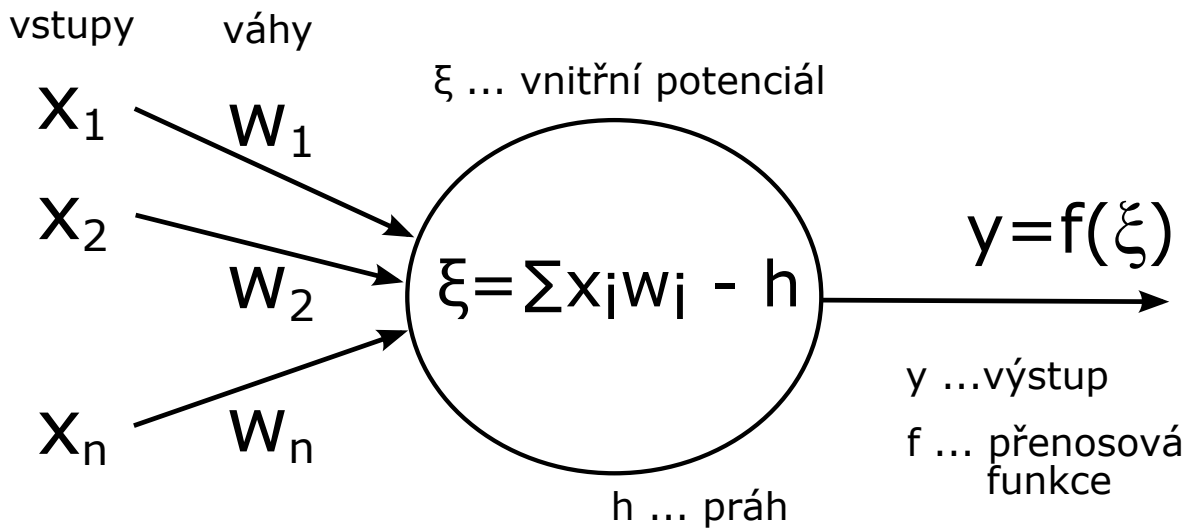
Co jsme probírali minule

- Matematický model neuronu
- Perceptron (Rosenblatt, 1954)
- Realizace logických funkcí pomocí perceptronu, logický prahový obvod
- **domácí úkol:** realizace logické funkce XOR



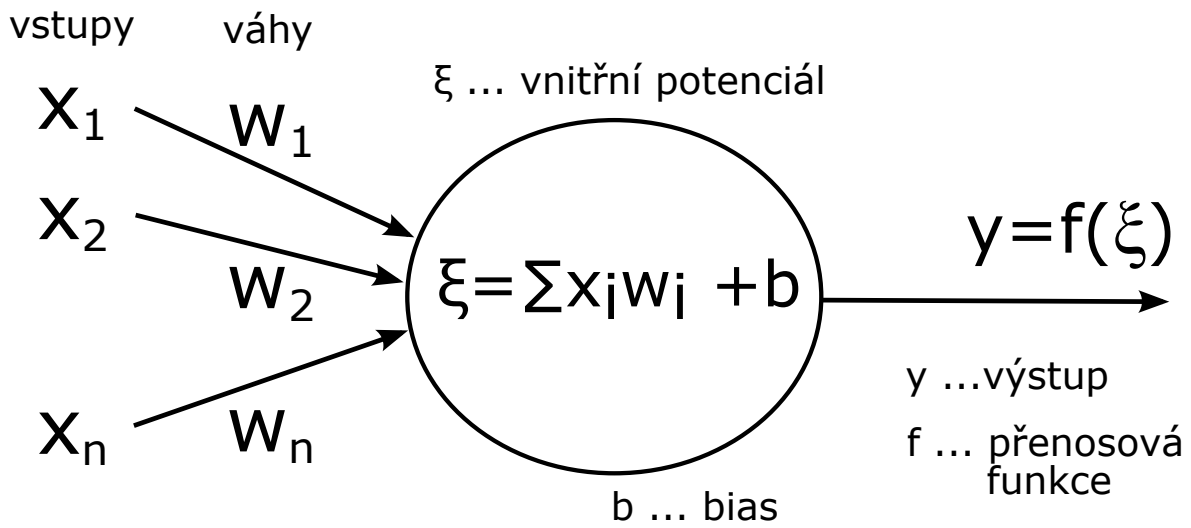
Matematický model neuronu



Klasická definice: práh h

- vnitřní potenciál: $\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i.x_i - h = \vec{x}\vec{w} - h$
- výstup: $y = f(\xi)$

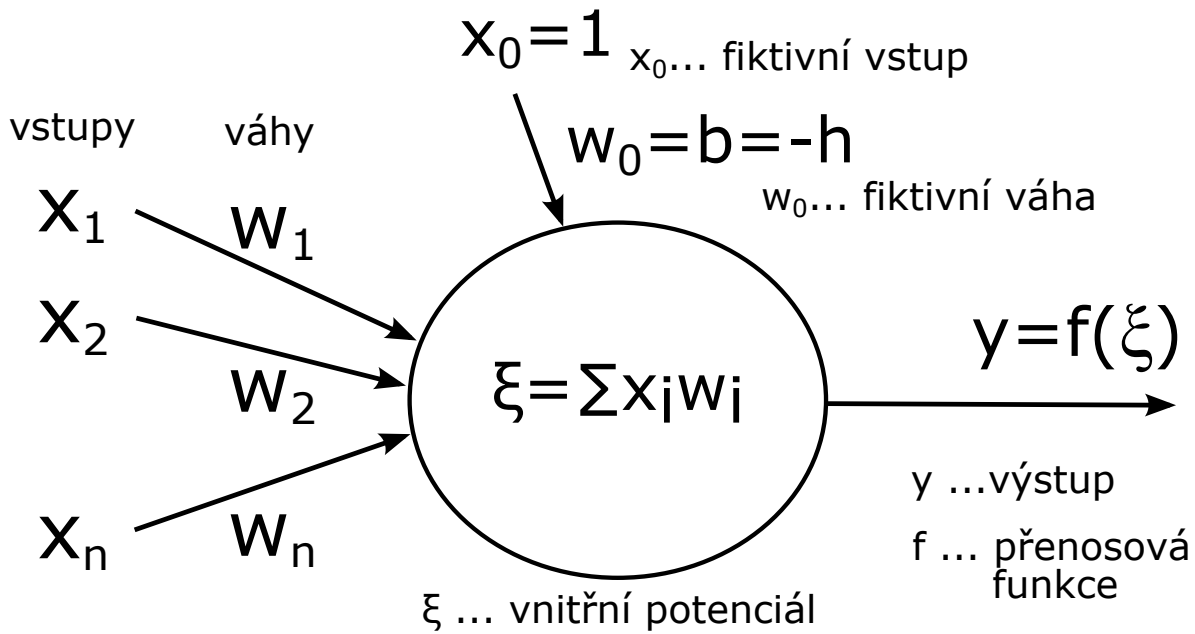
Matematický model neuronu



Alternativní definice: práh $\rightarrow$ bias

- vnitřní potenciál: $\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i.x_i + b = \vec{x}\vec{w} + b$
- výstup: $y = f(\xi)$

Matematický model neuronu



Alternativní definice: zavedení fiktivního vstupu

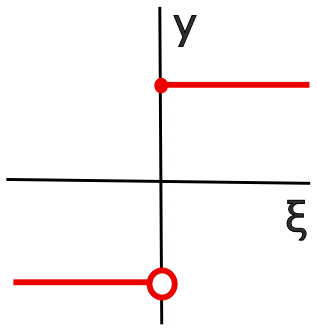
- rozšířený příznakový prostor ... $\vec{x} = (x_0 = 1, x_1, ..., x_n)$
- rozšířený prostor vah ... $\vec{w} = (w_0 = b = -h, w_1, ..., w_n)$
- vnitřní potenciál: $\xi = \sum_{i=0}^{n} w_i.x_i = \vec{x}\vec{w}$
- výstup: $y = f(\xi)$

Perceptrony (Rosenblatt, 1955)

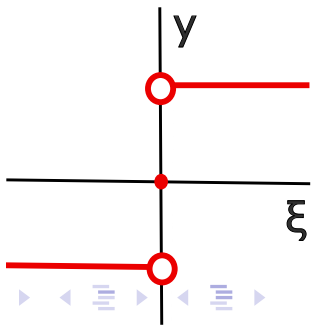
- reálné vstupy ... $x_i \in R$
- reálné váhy ... $w_i \in R$
- výstupy:
  - **binární** ... $y \in \{0, 1\}$
  - **bipolární** ... $y \in \{-1, 1\}$

Varianty skokové přenosové funkce pro bipolární perceptron:

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \xi \geq 0 \quad \text{... neuron je aktivní} \\ -1 & \text{pro } \xi < 0 \quad \text{... neuron je pasivní} \end{cases}$$



$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \xi > 0 \quad \text{... neuron je aktivní} \\ 0 & \text{pro } \xi = 0 \quad \text{... neuron je tichý} \\ -1 & \text{pro } \xi < 0 \quad \text{... neuron je pasivní} \end{cases}$$

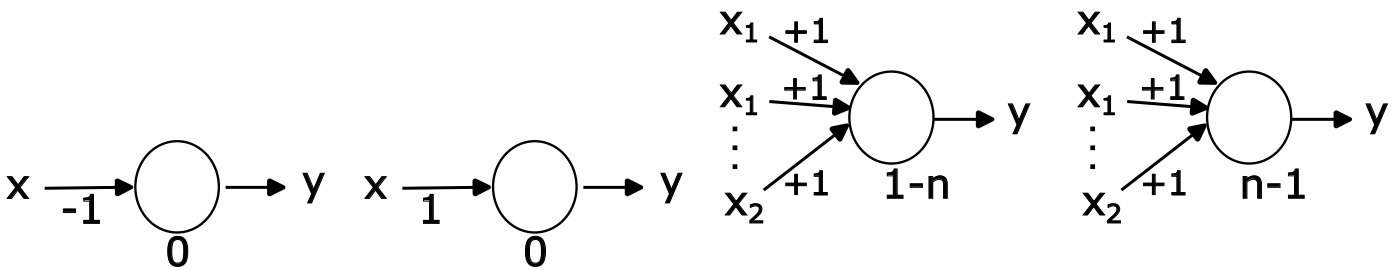


$\rightarrow$ funkce **signum** (sign)

Logický prahový obvod

Pomocí perceptronu lze realizovat základní logické funkce

- NOT (negace)
- ID (identita)
- AND (konjunkce)
- OR (disjunkce)
- a další (ale ne všechny :( )

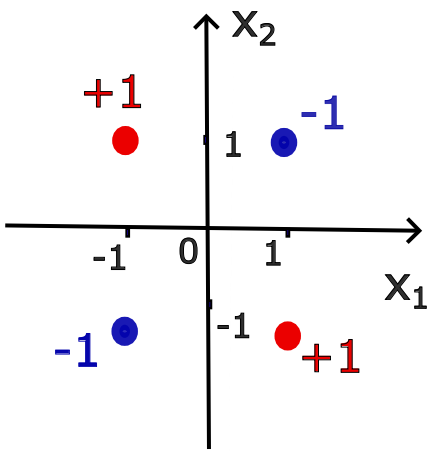


→ z perceptronů můžeme složit neuronovou síť reprezentující libovolnou logickou funkci

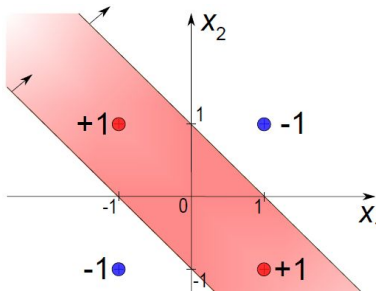
Logický prahový obvod - příklady

Příklad 3: Exkluzivní OR (XOR) bipolární model

x_1	x_2	$y = x_1 \otimes x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	+1
+1	-1	+1
+1	+1	-1



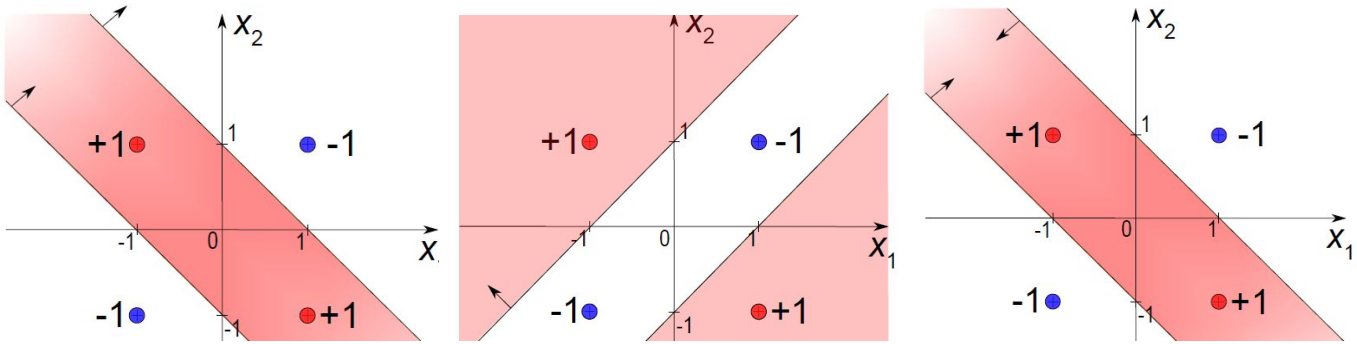
- XOR nelze realizovat jedním perceptronem (minule jsme si to dokázali)
- XOR lze realizovat pomocí perceptronové sítě (bylo za domácí úkol)



Logický prahový obvod - příklady

Příklad : Exkluzivní OR (XOR) - dobrovolný domácí úkol

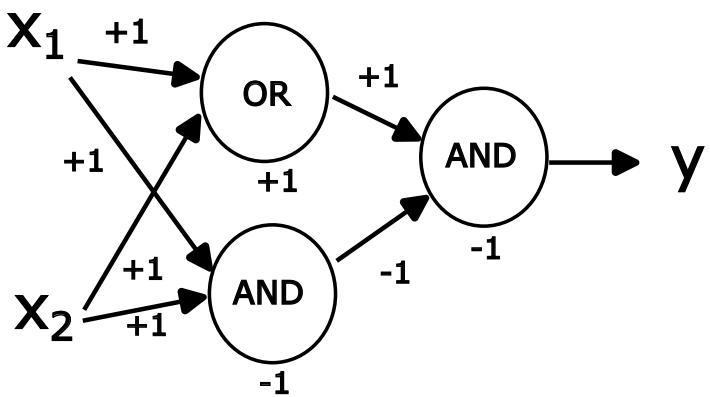
1. XOR můžeme pomocí základních logických operací (AND, OR, NOT) reprezentovat různě, zvládnete navrhnout několik různých způsobů?
2. Navrhněte co nejmenší neuronovou síť, která bude reprezentovat XOR. Kolik bude obsahovat neuronů?

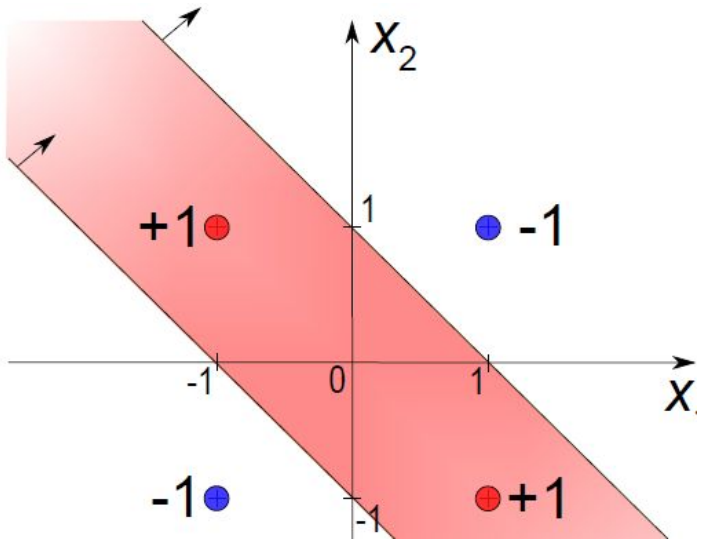


Logický prahový obvod - příklady

Příklad : Exkluzivní OR (XOR)

- 1. řešení: $x_1 \otimes x_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2)$

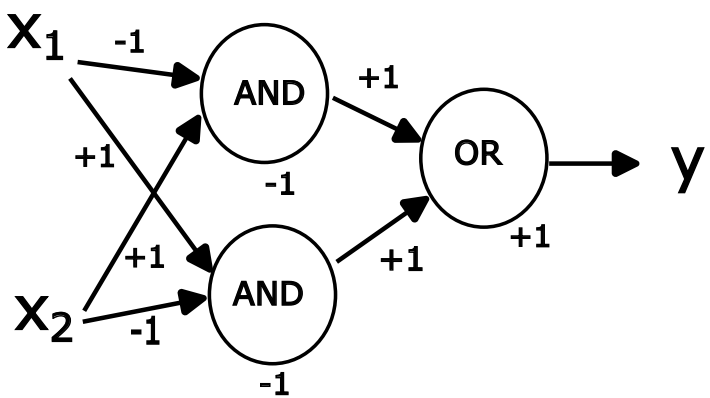


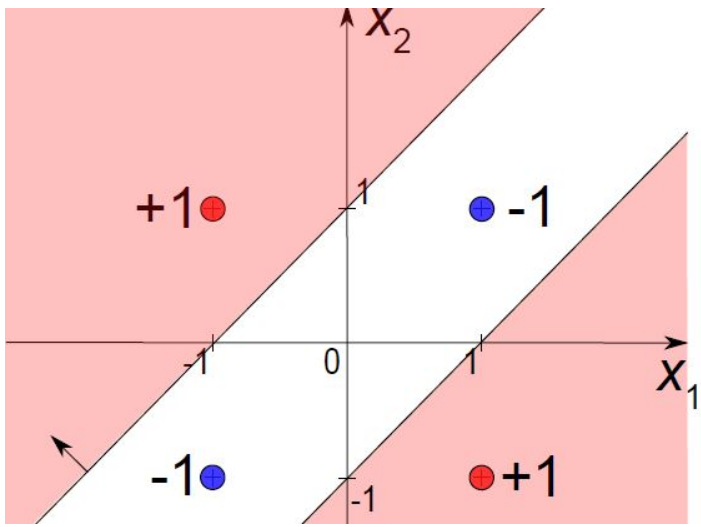


Logický prahový obvod - příklady

Příklad : Exkluzivní OR (XOR)

- 2. řešení: $x_1 \otimes x_2 = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$

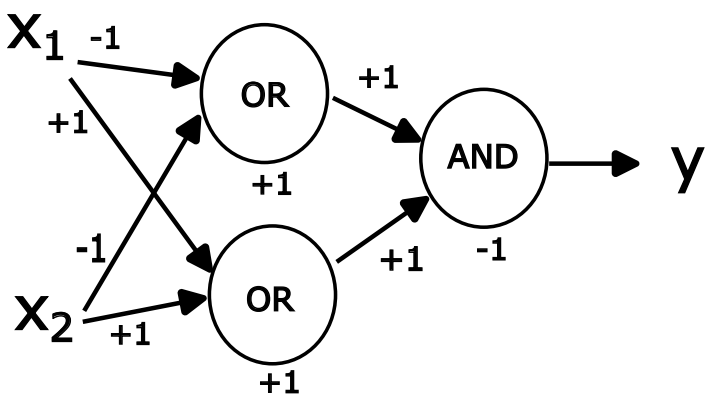


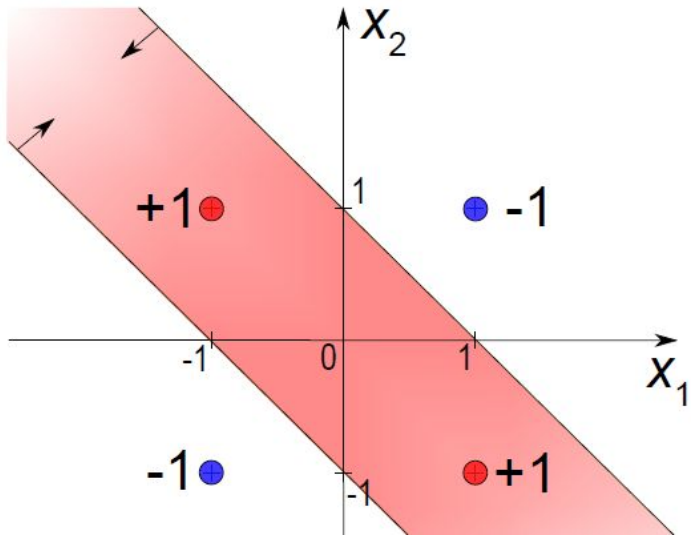


Logický prahový obvod - příklady

Příklad : Exkluzivní OR (XOR)

- 3. řešení:
  $x_1 \otimes x_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$





Perceptronová síť jako logický prahový obvod

Věta

Každou logickou formuli lze vyjádřit v **disjunktivním normálním tvaru (DNF)**, tj. jako disjunkci konjunkcí atomů, kde atomy tvoří proměnné nebo jejich negace.

- disjunkce: $F = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_n$
- konjunkce: $K_i = A_{i1} \wedge A_{i2} \wedge ... \wedge A_{in_i}$
- atomy: $A_{ij} = L$ nebo $A_{ij} = \neg L$

Příklad: $y = (x_2 \wedge x_4) \vee \neg x_1 \vee (x_2 \wedge \neg x_3)$

Důsledek

Každou logickou funkci mohu vyjádřit pomocí perceptronové neuronové sítě.

- **Otázka**: Navrhněte schéma takové perceptronové neuronové sítě. Kolik vrstev bude tato neuronová síť mít?

Perceptronová síť jako logický prahový obvod

Podobně

Každou logickou formuli lze vyjádřit v **konjunktivním normálním tvaru (CNF)**, tj. jako konjunkci disjunkcí atomů, kde atomy tvoří proměnné nebo jejich negace.

- konjunkce: $F = D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_n$
- disjunkce: $D_i = A_{i1} \vee A_{i2} \vee ... \vee A_{in_i}$
- atomy: $A_{ij} = L$ nebo $A_{ij} = \neg L$

Příklad: $y = (x_2 \vee x_4) \wedge \neg x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$

Realizace pomocí perceptronové sítě : analogicky jako u DNF

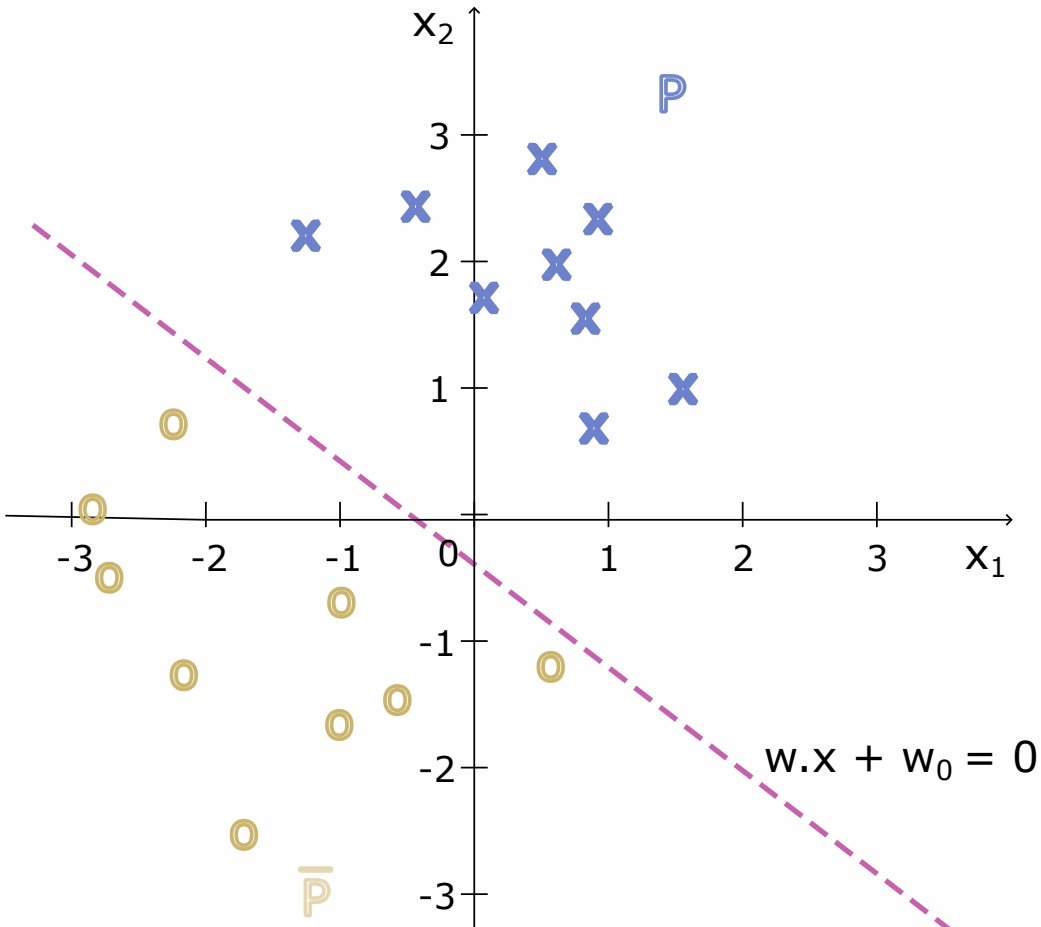
- AND realizuje průnik konvexních útvarů a OR jejich sjednocení

Dnešní hodina

1. **Perceptron a lineární separabilita**
2. Perceptron a jeho algoritmus učení

Perceptrony (Rosenblatt, 1955)

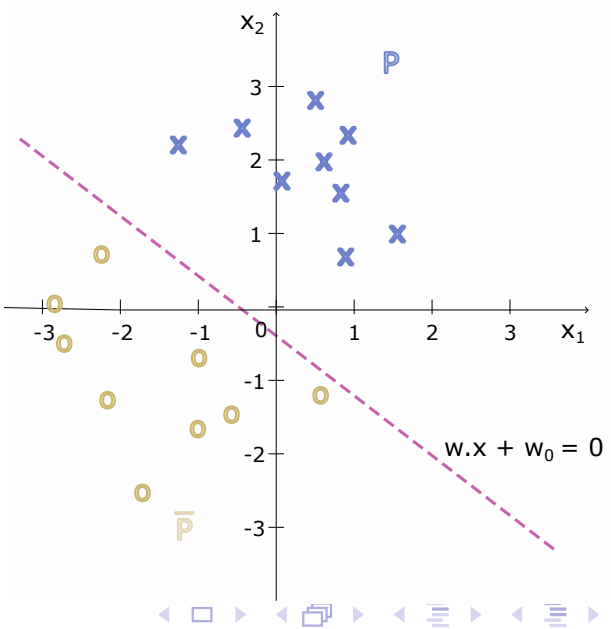
→ perceptron může sloužit jako **lineární klasifikátor:** klasifikuje vzory do dvou tříd (zde P, $\overline{P}$) pomocí **dělící nadroviny**
$\vec{w}\vec{x} + w_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i.x_i + w_0 = 0$



Lineární separabilita

Definice:
Dvě množiny P, $\overline{P}$ jsou **lineárně separabilní** v n-rozměrném prostoru, pokud existují čísla $w_0, ..., w_n$ taková, že pro každý bod $\vec{x} \in P$ platí $\sum_{i=1}^{n} w_i.x_i + w_0 > 0$ a pro každý bod $\vec{x} \in B$ platí $\sum_{i=1}^{n} w_i.x_i + w_0 < 0$.

Proč se zavedl tento pojem?
→ vědci zkoumali, které funkce lze realizovat pomocí perceptronu (nebo obecně lin. klasifikátoru) a které ne



Lineární separabilita

Pro Booleovský prostor:

- $n = 2 \rightarrow 14$ z $2^4 = 16$ logických funkcí je lineárně separabilních.
  otázka: Které dvě nejsou?
- $n = 3 \rightarrow 104$ z $2^8 = 256$ log. fcí je lin. sep.
- $n = 4 \rightarrow 1882$ z $2^{16} = 65536$ log. fcí je lin. sep.
- n obecné ... ??

$\rightarrow$ logických funkcí, které nelze reprezentovat pomocí perceptronu, je hodně a jejich procento roste s dimenzí příznakového (vstupního) prostoru

Lineární separabilita

Pro Booleovský prostor a $n = 2$

- 6 jednoduchých logických funkcí: 0, 1, A, B, $\neg A$, $\neg B$
  $\rightarrow$ triviální
- 8 variant konjunkce a disjunkce: $A \vee B$, $A \vee \neg B$, $\neg A \vee B$,
  $\neg A \vee \neg B$,
  $A \wedge B$, $A \wedge \neg B$, $\neg A \wedge B$, $\neg A \wedge \neg B \rightarrow$ trochu složitější
- 2 funkce, které perceptronem nelze realizovat: $A \otimes B$ (XOR) a
  $A \Leftrightarrow B$ (ekvivalence)

Lineární separabilita

Pro Booleovský prostor:

- $n = 2 \rightarrow 14$ z $2^4 = 16$ logických funkcí je lineárně separabilních.
- $n = 3 \rightarrow 104$ z $2^8 = 256$
- $n = 4 \rightarrow 1882$ z $2^{16} = 65536$
- n obecné ... ??

$\rightarrow$ logických funkcí, které nelze reprezentovat pomocí perceptronu, je hodně a jejich procento roste s dimenzí příznakového (vstupního) prostoru

Co s tím?

- místo jednoho neuronu použijeme perceptronovou síť
- rozšíříme příznakový prostor o další proměnné

Dnešní hodina

1. Perceptron a lineární separabilita
2. **Perceptron a jeho algoritmus učení**

Perceptron - algoritmus učení

Už víme:
Perceptron (se skokovou přenosovou funkcí) můžeme použít jako **lineární klasifikátor** vstupních vzorů do dvou množin/tříd (P a $\overline{P}$).

Dělicí nadrovina
určená (n+1)–rozměrným váhovým vektorem $\vec{w}$ je množina všech bodů $\vec{x} \in R^n$, pro které $\vec{w} \cdot \vec{x} + w_0 = 0$

Problém:
Nalézt takové váhy, resp. práh/bias, které by umožnily rozdělit vstupní vzory správně do množin P a $\overline{P}$- pomocí dělící nadroviny

Možné řešení:
Perceptronový (Rosenblattův) algoritmus učení (Rosenblatt, 1959)

Perceptron - algoritmus učení

Data, na základě kterých se bude model učit:

- trénovací množina T
  - množina N trénovacích vzorů $T = \{(\vec{x_1}, d_1), ..., (\vec{x_N}, d_N)\}$
- trénovací vzor (training pattern) ... $(\vec{x}, d)$,
  - $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ ... vstupní vzor (input pattern), má n příznaků
  - $d \in \{-1, 1\}$ ... požadovaný (očekávaný) výstup
- T můžeme rozdělit do dvou množin P a $\overline{P}$:
  - P ... kladné (pozitivní) vzory ($d = 1$)
  - $\overline{P}$ ... záporné (negativní) vzory ($d = -1$)
  - $T = P \cup \overline{P}$

Perceptron - algoritmus učení

Data, na základě kterých se bude model učit:

- Trénovací množina $T = \{(\vec{x_1}, d_1), ..., (\vec{x_N}, d_N)\}$:
- Maticová reprezentace $T = (X|\vec{d})$:

x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	d_1	... 1. trénovací vzor
x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	d_2	... 2. trénovací vzor
...	...		...	...	
x_{N1}	x_{N2}	...	x_{Nn}	d_N	... Ntý trénovací vzor

- Pro rozšířený příznakový prostor:

$x_{10} = 1$	x_{11}	...	x_{1n}	d_1	... 1. trénovací vzor
$x_{20} = 1$	x_{21}	...	x_{2n}	d_2	... 2. trénovací vzor
...	...		...	...	
$x_{N0} = 1$	x_{N1}	...	x_{Nn}	d_N	... Ntý trénovací vzor

Perceptron - algoritmus učení

Cíl učení:

- Nastavit váhy (a bias) neuronu tak, aby správně klasifikoval všechny trénovací vzory, tj:
  - $y_p = d_p$ ... pro všechny trénovací vzory z T
    y_p ... skutečná odezva (výstup) neuronu pro vstupní vzor $\vec{x}_p$
- Perceptron se skokovou přenosovou funkcí:

$$y_p = sign(\xi_p)$$

$$\xi_p = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{pi} + w_0 = \sum_{i=0}^{n} w_i x_{pi} = \vec{w} \cdot \vec{x}_p$$

$\vec{x}_p = (1, x_{p1}, ..., x_{pn})$ ... rozšířený vstupní vzor

$\rightarrow$ Chceme:

- $\vec{w} \cdot \vec{x_p} < 0$ ... pro rozšířené trénovací vzory z $\overline{P}$
- $\vec{w} \cdot \vec{x_p} > 0$ ... pro rozšířené trénovací vzory z P

Perceptron - algoritmus učení

Chceme:

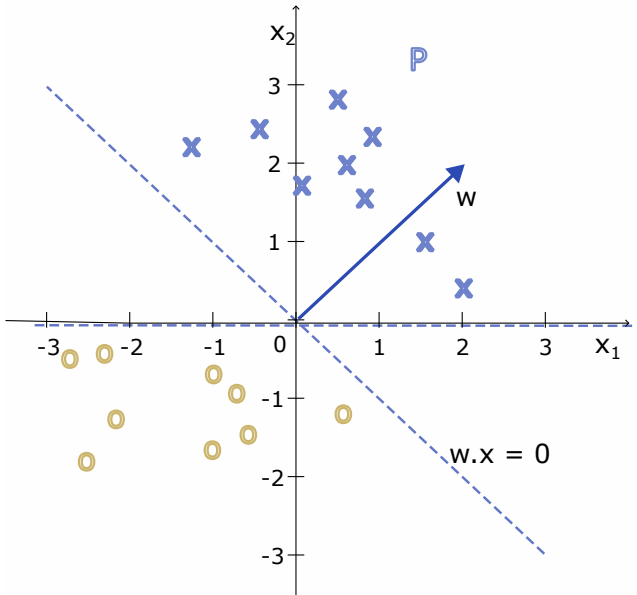
- $\vec{w} \cdot \vec{x_p} < 0$ ... pro rozšířené trénovací vzory z $\overline{P}$
- $\vec{w} \cdot \vec{x_p} > 0$ ... pro rozšířené trénovací vzory z P

Možnosti:

1. Soustava nerovnic nemá řešení $\rightarrow$ hledáme neperfektní řešení
2. Existuje alespoň jedno perfektní řešení $\vec{w}$ v R^{n+1} $\rightarrow$ existuje nekonečně mnoho řešení v R^{n+1} (dokonce v Z^{n+1})

Možné doplňkové podmínky:

- $|w_0| + |w_1| ... + |w_n| = min$
- $\sqrt{{w_0}^2 + \cdots {w_n}^2} = min$
- $max(|w_0|, ..., |w_n|) = min$



Perceptron - algoritmus učení

Značení:

- $y_p = F(\vec{x}_p)$ ... skutečná odezva (výstup) neuronu pro vstupní vzor $\vec{x}_p$

Cílová (chybová) funkce

- počet chybně klasifikovaných vzorů pro bipolární model:

$$E = \sum_{x \in P} \frac{1}{2}(1 - F(\vec{x})) + \sum_{x \in \overline{P}} \frac{1}{2}(1 + F(\vec{x}))$$

- pro binární model:

$$E = \sum_{x \in P} (1 - F(\vec{x})) + \sum_{x \in \overline{P}} F(\vec{x})$$

Cíl učení:

- Minimalizace E v prostoru vah. Nejlépe $E = 0$.

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení

Myšlenka a odvození:

- budeme pracovat v rozšířeném příznakovém a váhovém prostoru

Chceme:

- $\vec{w} \cdot \vec{x} < 0$ pro $(\vec{x}, d) \in \overline{P}$
- $\vec{w} \cdot \vec{x} > 0$ pro $(\vec{x}, d) \in P$

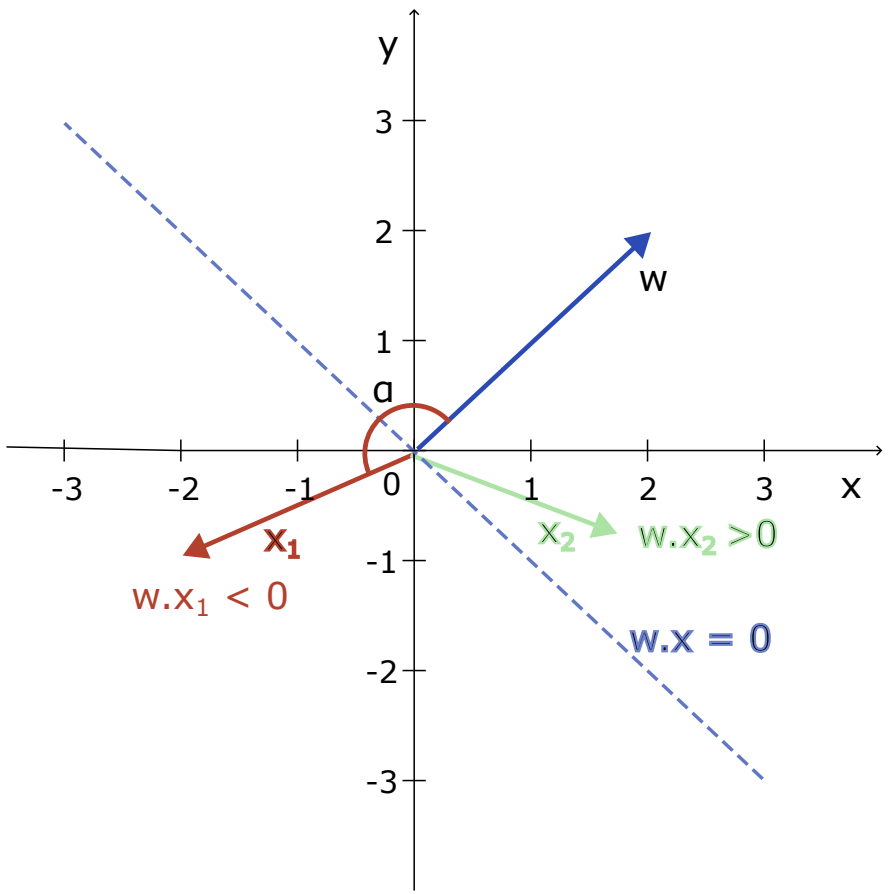
Z definice skalárního součinu:

- $\vec{w} \cdot \vec{x} = |\vec{w}||\vec{x}|cos(\alpha)$

$\rightarrow$

- $\vec{w} \cdot \vec{x} = 0 \ldots |\alpha| = 90°$
- $\vec{w} \cdot \vec{x} > 0 \ldots |\alpha| < 90°$
- $\vec{w} \cdot \vec{x} < 0 \ldots 180 \geq |\alpha| > 90°$

Geometrická interpretace:



Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení

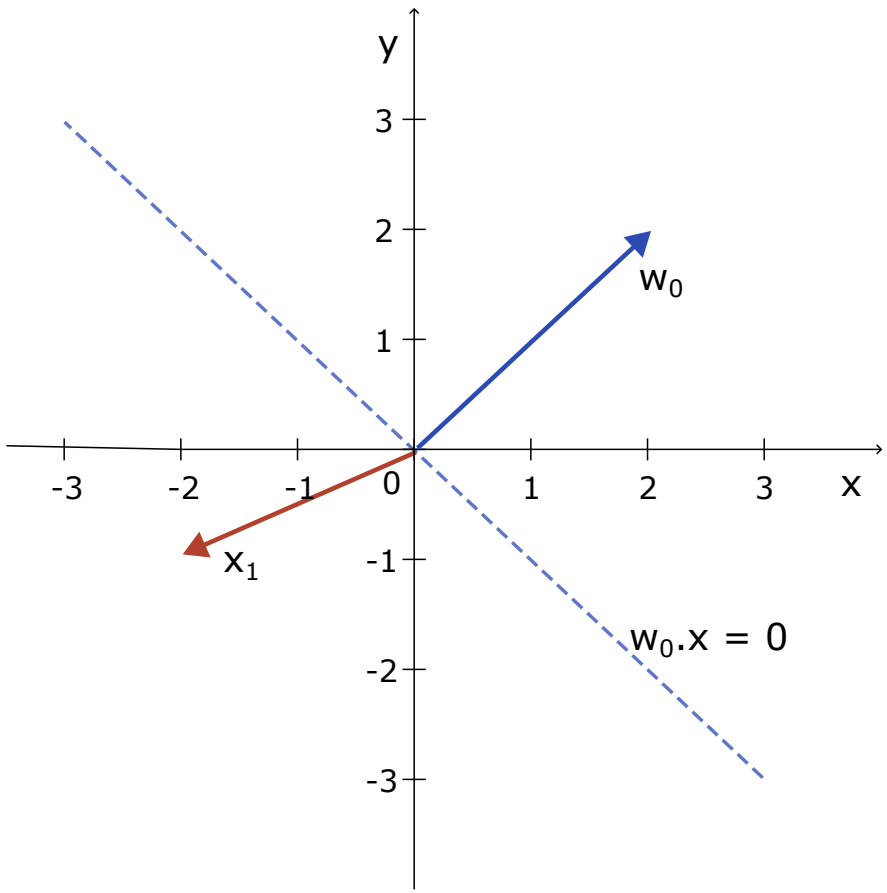
Myšlenka a odvození:

- $\vec{w_0}$ ... počáteční (aktuální) vektor vah
- $(\vec{x_1}, d = 1) \in P$ ... trénovací vzor, pro který model dává nesprávný výstup: $\vec{w_0} \cdot \vec{x_1} \leq 0$

Co uděláme:

- otočíme $\vec{w_0}$, aby se zmenšil úhel mezi $\vec{w_0}$ a $\vec{x_1}$
  $\rightarrow$ ideálně $|\alpha| < 90$

Geometrická interpretace:



Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení

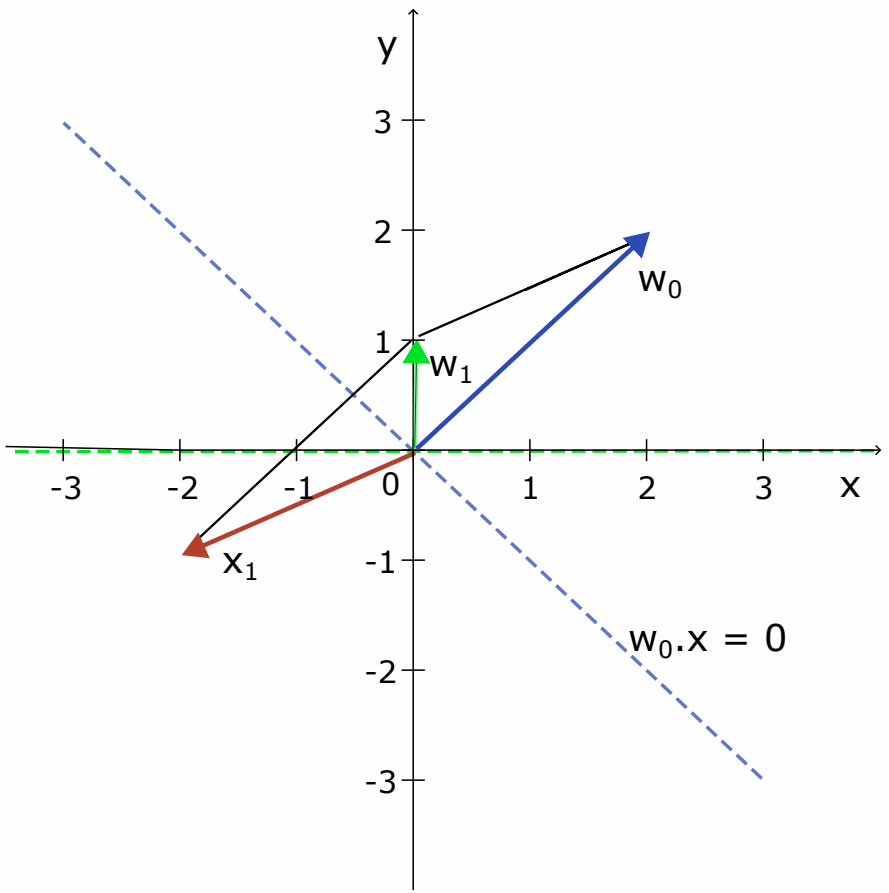
Myšlenka a odvození:

- $\vec{w_0}$ ... počáteční (aktuální) vektor vah
- $(\vec{x_1}, d = 1) \in P$ ... trénovací vzor, pro který model dává nesprávný výstup: $\vec{w_0} \cdot \vec{x_1} \leq 0$

Co uděláme:

- otočíme $\vec{w_0}$, aby se zmenšil úhel mezi $\vec{w_0}$ a $\vec{x_1}$
  $\rightarrow$ ideálně $|\alpha| < 90$
  $\rightarrow$ přičteme $\vec{x_1}$ k $\vec{w_0}$
  $\vec{w_1} = \vec{w_0} + \vec{x_1}$

Geometrická interpretace:



Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení

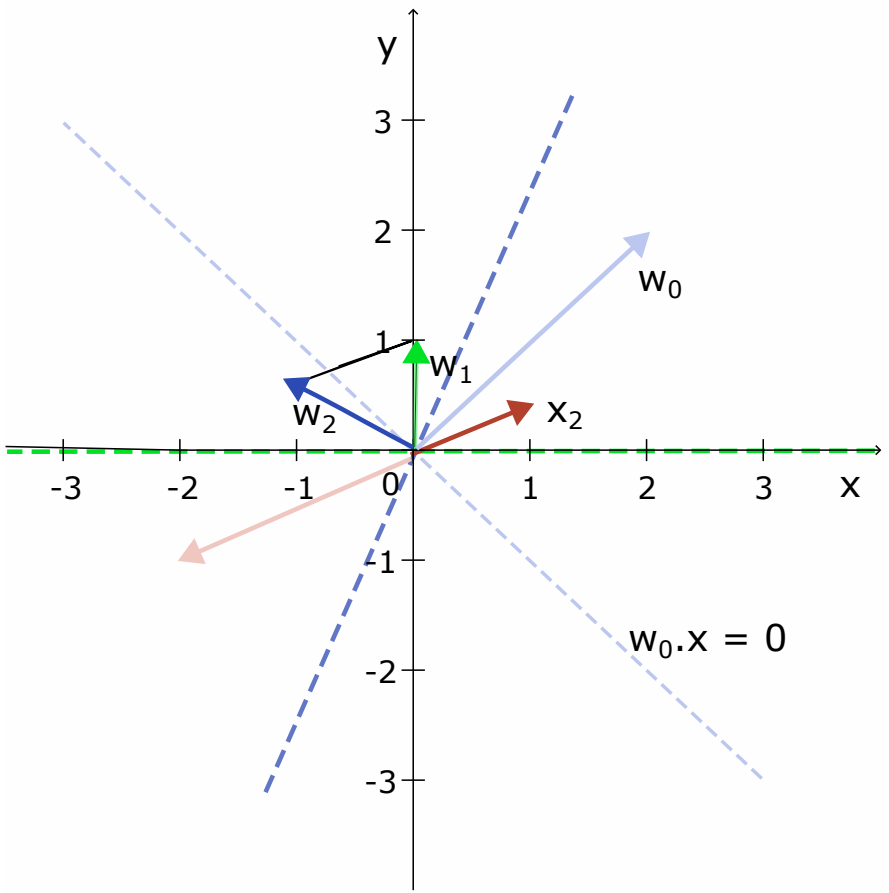
Myšlenka a odvození:

- $\vec{w_1}$ ... aktuální vektor vah
- trénovací vzor $(\vec{x_2}, d = -1) \in \overline{P}$, pro který: $\vec{w_1} \cdot \vec{x_2} \geq 0$

Co uděláme:

- otočíme $\vec{w_1}$, aby se zvětšil úhel mezi $\vec{w_1}$ a $\vec{x_2}$
  $\rightarrow$ ideálně $|\alpha| > 90$
  $\rightarrow$ odečteme $\vec{x_1}$ od $\vec{w_0}$
  $\vec{w_2} = \vec{w_1} - \vec{x_2}$

Geometrická interpretace:



Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

1. Inicializuj váhy:
   $\vec{w}(0) = (w_0, w_1, ..., w_n)^T$ ... vektor vah v čase 0 (včetně prahu/biasu) $w_0 = b = -h$
2. Předlož další trénovací vzor $(\vec{x}_t, d_t)$:
   $\vec{x}_t = (x_{t0} = 1, x_{t1}, , ..., x_{tn})$ ... vstupní vzor
   d_t ... požadovaný výstup
3. Spočti skutečný výstup (odezvu sítě):
   $y_t = sign(\vec{x}_t \vec{w})$
4. Adaptuj váhy:

$$\vec{w}(t+1) = \begin{cases} \vec{w}(t) & \text{pokud } y(t) = d(t) \\ \vec{w}(t) + \vec{x}_t^T & \text{pokud } y_t \neq 1, d_t = 1 \\ \vec{w}(t) - \vec{x}_t^T & \text{pokud } y_t \neq -1, d_t = -1 \end{cases}$$

   jinak napsáno: $\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + \vec{x}_t^T sign(d_t - y_t)$
5. Pokud t nedosáhl maximální hodnoty, přejdi ke kroku 2.

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

Jak předkládat trénovací vzory? .... různé strategie:

1. **iterativně**: jeden po druhém
   - **po tzv. epochách**: během jedné epochy se každý vzor se předloží právě jednou
   - počet epoch .... kolikrát se předloží celá trénovací množina
2. **náhodně** ... v každé iteraci se zvolí náhodný trénovací vzor
3. vhodná **kombinace předchozích strategií**:
   1. vrámci každé epochy vzory náhodně uspořádáme
   2. nejprve předkládáme vzory náhodně, na konci učení systematicky projdeme všechny vzory

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

Jak inicializovat váhy? .... různé strategie:

- $\vec{w}(0) = \vec{0}$
- náhodně: malé náhodné hodnoty
- použít nějakou heuristiku: např. průměr vzorů z P - průměr vzorů z $\overline{P}$
- ...

Kdy ukončit učení?

1. předem daný počet iterací nebo epoch
2. jakmile $E = 0$, popř. jakmile je chyba dostatečně malá ... $E < E_{min}$

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

Co když jsou vstupní vzory různě velké?

- nebo co když je jeden nebo několik vzorů tzv. odlehlých (outliers)?
  $\rightarrow$ může to vést k výraznému zpomalení učení
- **Řešení:** normalizace vstupních vektorů na stejnou velikost:

$$\vec{x}_{new} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{x}}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2}}$$

  $\rightarrow$ normalizovaný Rosenblattův algoritmus učení

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

Výhody

- Triviální algoritmus
- Pro lineárně separabilní množiny algoritmus konverguje, tj. nalezne správné řešení v konečném počtu kroků *(Rosenblatt, 1959)*

Nevýhody

- Velmi pomalý algoritmus
  - skutečný počet kroků roste exponenciálně s počtem vstupů
  - odlehlé vzory (pokud neprovedeme normalizaci)
- Umí klasifikovat jen lineárně separabilní množiny
- Chybí rozšíření pro více vrstev
- Špatné zobecňování ... nemusí najít ,,ideální" dělící nadrovinu

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

Příklad 1

	x_0	x_1	x_2	d
a	+1	-1	-1	+1
b	+1	-1	+1	+1
c	+1	+1	-1	+1
d	+1	+1	+1	-1

- $\vec{w}(0) = \vec{0}$
- vzory předkládáme iterativně (v rámci epochy náhodně)
  c, b, d, a; b, a, c, d; ...

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

Příklad 1

	x_0	x_1	x_2	d
a	+1	-1	-1	+1
b	+1	-1	+1	+1
c	+1	+1	-1	+1
d	+1	+1	+1	-1

Řešení c, b, d, a; b, a, c, d; ...

	w_0	w_1	w_2	d	ξ	y	operace
$\vec{w}(0)$	0	0	0				
c	+1	+1	-1	+1	0	0	+
$\vec{w}(1)$	+1	+1	-1				
b	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+
$\vec{w}(2)$	+2	0	0				

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

Příklad 1

	x_0	x_1	x_2	d
a	+1	-1	-1	+1
b	+1	-1	+1	+1
c	+1	+1	-1	+1
d	+1	+1	+1	-1

Řešení c, b, d, a; b, a, c, d; ...

	w_0	w_1	w_2	d	ξ	y	operace
$\vec{w}(2)$	+2	0	0				
d	+1	+1	+1	-1	+2	+1	-
$\vec{w}(3)$	+1	-1	-1				
a	+1	-1	-1	+1	+3	+1	nic

Perceptron - Rosenblattův algoritmus učení (1959)

Příklad 1

	x_0	x_1	x_2	d
a	+1	-1	-1	+1
b	+1	-1	+1	+1
c	+1	+1	-1	+1
d	+1	+1	+1	-1

Řešení c, b, d, a; b, a, c, d; ...

	w_0	w_1	w_2	d	ξ	y	operace
$\vec{w}(4)$	+1	-1	-1				
b	+1	-1	+1	+1	+1	+1	nic
a	+1	-1	-1	+1	+3	+1	nic
c	+1	+1	-1	+1	+1	+1	nic
d	+1	+1	+1	-1	-1	-1	nic, konec

$$\rightarrow \vec{w} = (+1, -1, -1)^T$$

Perceptron - Další algoritmy učení

Další varianty perceptronového učícího algoritmu

1. Dávkový algoritmus učení
   - celou trénovací množinu předložíme najednou:

$$\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + \sum_{p=1}^{N} \vec{x}_p^T \, sign(d_p - y_p)$$

2. Rosenblattův algoritmus s parametrem učení
   - při přičítání/odčítání vzory vážíme:
     $\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + \alpha \vec{x}_t^T \, sign(d_t - y_t)$
3. Přihrádkový algoritmus
   - pro nalezení optimálního řešení i pro lineárně neseparabilní množiny

Hebbovo učení

- každý trénovací vzor se předloží právě jednou:

$$\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + d_t \vec{x}_t^T$$

Perceptron - Dávkový algoritmus učení

- celou trénovací množinu předložíme najednou:

$$\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + \sum_{p=1}^{N} \vec{x}_p^T \, sign(d_p - y_p)$$

- Pro maticovou reprezentaci:
  $w(t) = (w_0, w_1, ..., w_n)^T$
  $T = (X, \vec{d})$

$x_{10} = 1$	x_{11}	...	x_{1n}	d_1
...	...		...	...
$x_{N0} = 1$	x_{N1}	...	x_{Nn}	d_N

$$\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + X^T \, sign(\vec{d} - \vec{y})$$

Perceptron - Dávkový algoritmus učení

1. Inicializuj váhy:
   $\vec{w}(0) = (w_0, w_1, ..., w_n)^T$ ... vektor vah v čase (epoše) 0
2. Předlož celou trénovací množinu $(X, \vec{d})$

$x_{10} = 1$	x_{11}	...	x_{1n}	d_1
...	...		...	
$x_{N0} = 1$	x_{N1}	...	x_{Nn}	d_N

3. Spočti skutečný výstup (odezvu sítě) $\vec{y}$:

$$\vec{y} = sign(X\vec{w})$$

4. Adaptuj váhy:

$$\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + X^T sign(\vec{d} - \vec{y})$$

5. Pokud počet epoch nedosáhl maximální hodnoty, přejdi ke kroku 2.

Perceptron - Dávkový algoritmus učení

Výhody a nevýhody

- maticová reprezentace, možnost paralelizace výpočtu
- často rychlejší a stabilnější konvergence než u Rosenblattova algoritmu (ale ne vždy)
- výsledek učení nezávisí na pořadí vzorů
- větší paměťová složitost
- důkaz konvergence?

Bipolární Perceptron - Hebbovo učení (1949)

- každý trénovací vzor předložíme právě jednou:
  1. Inicializuj váhy:
     $\vec{w}(0) = \vec{0}^T$
  2. Pro každý trénovací vzor $\vec{x}_t$ $(t = 1, \cdots, N)$ uprav váhy:

$$\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + d_t \vec{x}_t^T$$

maticově:

$$\vec{w} = X^T \vec{d}$$

Výhody a nevýhody

- jednodušší než Rosenblattův algoritmus
- při učení není třeba počítat skutečný výstup
- výsledek učení nezávisí na pořadí vzorů
- váhy lze snadno interpretovat
- nezaručuje nalezení perfektního řešení

Bipolární Perceptron - Hebbovo učení (1949)

Příklad 1

	x_0	x_1	x_2	d
a	+1	-1	-1	+1
b	+1	-1	+1	+1
c	+1	+1	-1	+1
d	+1	+1	+1	-1

Bipolární Perceptron - Hebbovo učení (1949)

Příklad 1

	x_0	x_1	x_2	d
a	+1	-1	-1	+1
b	+1	-1	+1	+1
c	+1	+1	-1	+1
d	+1	+1	+1	-1

Řešení:

	w_0	w_1	w_2
$\vec{w}(0)$	0	0	0
$d_a\vec{x}_a$	+1	-1	-1
$\vec{w}(1)$	+1	-1	-1
$d_b\vec{x}_b$	+1	-1	+1
$\vec{w}(2)$	+2	-2	0

Bipolární Perceptron - Hebbovo učení (1949)

Příklad 1

	x_0	x_1	x_2	d
a	+1	-1	-1	+1
b	+1	-1	+1	+1
c	+1	+1	-1	+1
d	+1	+1	+1	-1

Řešení:

	w_0	w_1	w_2
$\vec{w}(2)$	+2	-2	0
$d_c\vec{x}_c$	+1	+1	-1
$\vec{w}(3)$	+3	-1	-1
$d_d\vec{x}_d$	-1	-1	-1
$\vec{w}(4)$	+2	-2	-2

$\rightarrow \vec{w} = (+2, -2, -2)^T$

Bipolární Perceptron - Hebbovo učení (1949)

Příklad 1

	x_0	x_1	x_2	d
a	+1	-1	-1	+1
b	+1	-1	+1	+1
c	+1	+1	-1	+1
d	+1	+1	+1	-1

Řešení maticově: $\vec{w} = X^T \vec{d}$

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \vec{w} = (+2, -2, -2)^T$ ... naučil se perceptron správně?

Bipolární Perceptron - Hebbovo učení (1949)

Příklad 1

Řešení : $\vec{w} = (+2, -2, -2)^T$ ... naučil se perceptron správně?

	x_0	x_1	x_2	d	ξ	y	
a	+1	-1	-1	+1	+6	+1	ok
b	+1	-1	+1	+1	+2	+1	ok
c	+1	+1	-1	+1	+2	+1	ok
d	+1	+1	+1	-1	-2	-1	ok

$\rightarrow$ ano

Poznámka

- stejný by byl první krok dávkového algoritmu učení pro $\vec{w}_0 = \vec{0}$
- Hebbovo učení můžeme použít pro inicializaci vah pro Rosenblattův algoritmus

Perceptron - Rosenblattův algoritmus s parametrem učení

1. Inicializuj váhy a práh malými náhodnými hodnotami:
   $\vec{w}(0) = (w_0, w_1, ..., w_n)$ ... vektor vah v čase 0 (včetně prahu/biasu) $w_0 = b = -h$
2. Předlož další trénovací vzor $(\vec{x}_t, d_t)$:
   $\vec{x}_t = (x_{t0} = 1, x_{t1}, , ..., x_{tn})$ ... vstupní vzor
   d_t ... požadovaný výstup
3. Spočti skutečný výstup (odezvu sítě):
   $y_t = sign(\vec{w} \cdot \vec{x}_t)$
4. Adaptuj váhy:

$$\vec{w}(t+1) = \begin{cases} \vec{w}(t) & \text{pokud } y(t) = d(t) \\ \vec{w}(t) + \alpha \vec{x}_t^T & \text{pokud } y_t \neq 1, d_t = 1 \\ \vec{w}(t) - \alpha \vec{x}_t^T & \text{pokud } y_t \neq -1, d_t = -1 \end{cases}$$

jinak napsáno: $\vec{w}(t+1) = \vec{w}(t) + \alpha \vec{x}_t^T sign(d_t - y_t)$
α ... parametr učení

Perceptron - Rosenblattův algoritmus s parametrem učení

Jak ovlivní volba parametru učení výsledek?

- výrazné zrychlení učení
- Doporučení: $\alpha \in (0, 1]$
- Nejlépe: α zpočátku velké, postupně $\alpha \to 0$

Výhody a nevýhody

- Obvykle rychlejší než Rosenblattův algoritmus
- Pro lineárně separabilní množiny algoritmus konverguje, tj. nalezne správné řešení v konečném počtu kroků *(Rosenblatt, 1959)*
- skutečný počet kroků roste exponenciálně s počtem vstupů

Perceptron - Přihrádkový algoritmus (Gallant, 1990)

Idea

- Použiji (iterativní) Rosenblattův algoritmus učení
- Nejlepší doposud nalezený vektor vah mám uložený v přihrádce
- Pokud najdu lepší váhový vektor (tj. s menší chybou), uložím ho do přihrádky

Výhody

- I pro lineárně neseparabilní množiny vzorů nalezne algoritmus nejlepší řešení.
  - Pokud je trénovací množina konečná a složky váhového vektoru a vstupních vektorů jsou racionální, lze ukázat, že přihrádkový algoritmus konverguje k optimálnímu řešení s pravděpodobností 1 (Gallant, 1990).