Složitost algoritmů ... jednoduché příklady

Základy algoritmizace – 2. cvičení

Zuzana Petříčková

28. února 2020

Pár vzorečků

- $1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$
- $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
- $\sum_{i=1}^{n} i^k \in O(n^{k+1}), k \in N$
- $\sum_{i=0}^{n} aq^n = a\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, q \neq 1$
- $\sum_{i=0}^{n} 2^n = 2^{n+1} - 1$
- $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Příklady

Příklad 1

$h = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

Složitost $O(n)$

Příklad 2

$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = n \sum_{i=1}^{n} = n^2$

Složitost $O(n^2)$

Příklad 3

$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$

Složitost $O(n^2)$

Příklad 4

$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n = \sum_{i=1}^{n} n^2 = n^3$

Složitost $O(n^3)$

Příklady

Příklad 5

$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} n(n+1)/2 = n^2(n+1)/2$

Složitost $O(n^3)$

Příklad 6

$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i^2} 1 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1/6n(n+1)(2n+1)$

Složitost $O(n^3)$

Příklad 7

$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} i(i+1) = \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i] = \frac{1}{2}[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1)] = \frac{1}{12} n(n+1)[2n+1-3] = \frac{1}{6} n(n+1)(n-1)$

Složitost $O(n^3)$

Příklad 8

$h = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n^2} 1 + \sum_{k=1}^{n} 1) = \sum_{i=1}^{n} (n^2 + n) = n^3 + n^2$

Složitost $O(n^3)$

Příklady

Příklad 9

$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{100} 1 = \sum_{i=1}^{n} 100 = 100n$

Složitost $O(n)$

Příklad 10

Vnitřní cyklus:

$j = 1\ 4\ 7\ 10\ 13\ 16\ \dots$

$h = 1\ 2\ 3\ 4\ \ 5\ \ 6\ \dots$

$h = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

Vnější cyklus:

$i = 1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ \dots$

$k = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \dots$

$k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Celkem $h = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lceil \frac{n}{3} \rceil$, tj. $\frac{n^2}{6} \leq h \leq \frac{(n+1)(n+2)}{6}$

Složitost $O(n^2)$

Rozmyslet si, že by šli forcyklusy převést na $\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} 1 = KL$,

$K = \lceil \frac{n}{2} \rceil, L = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

Příklady

Příklad 11

$i = 1\ 2\ 4\ 8\ 16\ 32 \ldots$

$h = 1\ 2\ 3\ 4\ \ 5\ \ 6 \ldots$

$i = 2^{(h-1)}$, tedy $h = log_2 i + 1$

protože pro maximální i a n platí $2i > n >= i \rightarrow h = \lfloor log_2 n \rfloor + 1$

Složitost $O(log_2 n)$

Rozmyslet si, že by šel forcyklus převést na

$\sum_{k=1}^{L} 1 = L,\ L = \lfloor log_2 n \rfloor + 1, i_k = 2^{k-1}$

Příklad 12

$L = \lfloor log_2 n \rfloor + 1$ je počet opakování vnějšího cyklu

$h = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{n} 1 = (\lfloor log_2 n \rfloor + 1)n$

Složitost $O(nlog_2 n)$

Příklady

Příklad 13

$L = \lfloor log_2 n \rfloor + 1$ je počet opakování vnějšího cyklu

$h = \sum_{k=1}^{L} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{L-1} 2^k = 2^L - 1 = 2^{\lfloor log_2 n \rfloor + 1} - 1$

$h \leq 2^{log_2 n + 1} - 1 = 2n - 1$

$h > 2^{log_2 n} - 1 = n - 1$

Složitost $O(n)$

Příklad 14

$L = \lfloor log_2 n \rfloor + 1$ je počet opakování vnitřního cyklu

$h = \sum_{j=1}^{n} (\lfloor log_2 j \rfloor + 1) = n + \sum_{j=1}^{n} \lfloor log_2 j \rfloor$

$h \leq n + log_2 n! \approx n log_2 n + n(1 - log_2 e) + \frac{1}{2} log_2 n + \frac{1}{2} log_2 (2\pi)$

$h > log_2 n! \approx n log_2 n - n log_2 e + \frac{1}{2} log_2 n + \frac{1}{2} log_2 (2\pi)$

Složitost $O(n log_2 n)$