

1 Cvičení č. 1

1.1 Zobrazení

Určete, která z následujících zobrazení jsou prostá, na a vzájemně jednoznačná.

$$A = \{0, 1, 2\}, B = \{0, 1, 2, 3\} \quad (1)$$

$$f : A \mapsto B; f = \{(0, 3), (1, 2), (2, 0)\} \quad (2)$$

$$f : A \mapsto B; f = \{(0, 3), (1, 2), (2, 3)\} \quad (3)$$

$$f : A \mapsto A; f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\} \quad (4)$$

$$f : A \mapsto A; f = \{(0, 1), (1, 1), (2, 0)\} \quad (5)$$

$$f : B \mapsto A; f = \{(0, 2), (1, 0), (2, 1), (3, 0)\} \quad (6)$$

$$f : R \mapsto R; f(x) = x^2 + 5x + 4 \quad (7)$$

$$f : R \mapsto (-1, 1); f(x) = \frac{x}{|x| + 1} \quad (8)$$

$$f : R \mapsto R; f(x) = \frac{x}{|x| + 1} \quad (9)$$

$$f : (1, 2) \mapsto \langle 0, 2 \rangle; f(x) = \sqrt{x(x-1)} \quad (10)$$

$$f : R \mapsto R; f(x) = |x + 2| - 1 \quad (11)$$

$$f : \langle -2, +\infty \rangle \mapsto \langle -1, +\infty \rangle; \quad (12)$$

$$f(x) = |x + 2| - 1 \quad (13)$$

1.2 Množiny

Určete, zda jsou následující množiny omezené, omezené shora, omezené zdola, určete infimum a supremum a zda je nabývají.

$$A = \{3 - n; n \in N\} \quad (14)$$

$$A = \{3 - x; x < 0; x \in R\} \quad (15)$$

$$A = \{2(1 - x) + 5; x \in \langle 0, 1 \rangle\} \quad (16)$$

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}; n \in N \right\} \quad (17)$$

$$A = \left\{ \frac{1}{1 + x^2}; x \in R \right\} \quad (18)$$

$$A = \{\cos(x); x \in (0, 2\pi)\} \quad (19)$$

$$A = \{\sin(x)\cos(x); x \in R\} \quad (20)$$

$$A = \{q < \sqrt{3}; q \in Q\} \quad (21)$$

$$A = \{n^{(-1)^n}; n \in N\} \quad (22)$$

1.3 Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí:

$$\forall n \in N \forall x \in R, x \geq -1 : \quad (23)$$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 \quad (27)$$

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1 \quad (28)$$

2 Cvičení č. 2

2.1 Zkrácené psaní součtů a součinů

Spočtěte:

$$\sum_{i=-n}^n (2 - 5i) \quad (1)$$

$$\sum_{i=-5}^n (3 - i) \quad (2)$$

$$\sum_{i,j,k=1}^n ijk \quad (3)$$

$$\prod_{i,j,k=1}^n ijk \quad (4)$$

$$\prod_{i,k=1}^n i^k \quad (5)$$

2.2 Nerovnice

Pro která $x \in R$ platí?

$$\frac{x - 2}{2x - 8} \geq 1 \quad (6)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0 \quad (7)$$

$$\frac{x + 2}{x + 3} > \frac{2x + 3}{x + 6} \quad (8)$$

2.3 Posloupnosti

Určete u následujících posloupností: monotonii (a typ), konvergenci, limitu a omezenost (typ):

$$a_n = n \quad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (10)$$

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{4} \quad (11)$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad (12)$$

$$a_n = (-1)^n n \quad (13)$$

$$a_n = \frac{n^2 - n}{n^2} \quad (14)$$

2.4 Limity

Zapište pomocí kvantifikátorů:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2 \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq -2 \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existuje} \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ neexistuje} \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq -\infty \quad (20)$$

Dokažte z definice limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0; \quad k \in N \quad (22)$$

Limity podílu polynomů

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 2n + 3n^3}{7 + 5n - 2n^3} \quad (23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 10n^3 + 5n^6}{5 - 10n - 5n^4} \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 3)^2}{2n^2 + 1} \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 3)^{20} (3n + 5)^{30}}{(2n + 1)^{50}} \quad (27)$$

3 Cvičení č. 3

Limity podílu polynomů, Binomická věta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - n^2 + 5}{6n^3 + 5n - 7} \right)^{-3} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt[2]{n^3 + 1}} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^2 - (3n - 1)^3}{(n + 1)^2 - (2n + 3)^3} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 5)^{100} - (n + 3)^{100}}{(n + 2)^{100} - n^{100}} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 4)^{27} - (n + 1)^{27}}{(2n^2 + 5)^{13} - (n^2 - 1)^{13}} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} - \sqrt[2]{n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - n + 1}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

Různé limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n + 1)! - n!} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)! + (n + 1)!}{(n + 3)!} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}} \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (13)$$

Podílové kritérium

$$\forall k \in \mathbb{N} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (15)$$

Cauchyův vzorec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \quad (17)$$

Podposloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2 + 3(-1)^n} \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} n \quad (20)$$

Věta o dvou polícajtech, limita a omezenost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \quad (21)$$

$$a > 0, b > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (22)$$

4 Cvičení č. 4

Opakování a doplnění z minule

$$a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{a} \quad (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4n^2 + 5} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^2 - 1}) \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2}{n+1} \right] \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad (18)$$

Limity posloupností odvozených od a^n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{3^n} \quad (5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n)^3 \quad (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{999}{1000} + \frac{4}{n}\right)^n \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{9}{10}\right)^{n!} \quad (7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1} \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{10}{9}\right)^{n!} \quad (8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \quad (9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \ln \left(1 + \frac{1}{e^n}\right) \quad (23)$$

$$a \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \quad (10) \quad \text{Vypočtěte limes superior, limes inferior z posloupností:}$$

$$a \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a^n} \quad (11) \quad a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad (24)$$

Eulerovo číslo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad (12) \quad a_n = (-1)^n \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\log_2 n}\right)^{\log_2 n} \quad (13) \quad a_n = n + (n+1)(-1)^n \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \quad (14) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad (27)$$

5 Cvičení č. 5

Dokažte podle definice limity funkce:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x] = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x \quad (16)$$

Spočítejte pomocí věty o jednostranných limitách:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [x] \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \quad [-1] \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \quad [-1] \quad (18)$$

Příklady s polynomy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro } x < 0, \\ e^x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}, \quad \left[\frac{3}{8} \right] \quad (19)$$

Dokažte pomocí Heineho věty:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x \quad \text{neexistuje} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}, \quad \left[-\frac{3}{2} \right] \quad (20)$$

Rozcvička

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}, \quad \left[\frac{3}{2} \right] \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}, \quad [6] \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad [n] \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}, \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, \quad \left[\frac{1 - a^n}{1 - a} \right] \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^m - (1+mx)^n}{x^2}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad \left[\frac{1}{2} nm(n-m) \right] \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \quad (14)$$

6 Cvičení č. 6

Příklady s odmocninami

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x, \left[\frac{1}{2} \right] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x, [+\infty] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}, [1] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}, [-1] \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x + 1}, [1] \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}, \left[\frac{4}{3} \right] \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right), \left[\frac{2}{3} \right] \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}, \left[\frac{3}{2} \right] \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}, n, m \in N, \left[\frac{n}{m} \right] \quad (9)$$

Limita složené funkce – rozcvička

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}, [5] \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, [1] \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}, [0] \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, [1] \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}, \left[\frac{3}{2} \right] \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}, \left[\frac{1}{2} \right] \quad (15)$$

Příklady týkající se goniometrických funkcí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}, [1] \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \left[\frac{1}{2} \right] \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}, a \in R, [\cos a] \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}, \left[\frac{3}{4} \right] \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \left[\frac{1}{2} \right] \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}, [-24] \quad (21)$$

7 Cvičení č. 7

Příklady týkající se logaritmů

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}, \left[-\frac{1}{2}\right] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}, [1] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}, [0] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}, a, b \in R, b \neq 0, \left[\frac{a^2}{b^2}\right] \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}, \left[\frac{1}{5}\right] \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{-1}{3}})}{\ln(1 - x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{-1}{4}})}, [0] \quad (6)$$

Příklady týkající se exponenciály

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}, [e] \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1}\right)^{x^2}, [0] \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1}\right)^{\frac{1}{x^2}}, [1] \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}, \left[\frac{1}{2}\right] \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}, \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-5x}}{x}, [8] \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}, a \in R, [e^a] \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^2)^{\frac{1}{x^2}}, [e^{-3}] \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^2)^{\frac{1}{x}}, [1] \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x^2}}, [\text{neex.}] \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}, [e^{-1}] \quad (17)$$

Příklady s cyklometrickými funkcemi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right), \left[\frac{\pi}{2}\right] \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{x + x^2}}\right), \left[\frac{\pi}{4}\right] \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right), [\text{neex.}] \quad (20)$$

8 Cvičení č. 8

Dokončení z minula a příklady z testu

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg(2x)}, [e^{-1}] \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+5}{3n+4} \right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3^x + 1)}{\ln(2^x + 1)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \quad (5)$$

Spočtětě derivaci funkce na jejím definičním oboru podle definice derivace:

$$f(x) = \ln(x) \quad (6)$$

$$f(x) = e^x \quad (7)$$

$$f(x) = x^n; \quad n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

Spočtětě derivaci funkce za využití pravidel pro výpočet derivace a základních derivací. Určete, pro která x je derivace funkce definovaná.

$$f(x) = 5(x^2 - 5x + 6)^3 \quad (9)$$

$$f(x) = \sqrt{1 + \ln^2(x)} \quad (10)$$

$$f(x) = x(\sin x)(\operatorname{arctg} x) \quad (11)$$

$$f(x) = \arccos \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{2 + \cos x} \quad (13)$$

$$f(x) = \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - (\cos x)(\ln \operatorname{tg} x) \quad (14)$$

9 Cvičení č. 9

Spočtětě derivaci funkce za využití pravidel pro výpočet derivace a základních derivací. Určete, pro která x je derivace funkce definovaná.

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}} \quad (2)$$

$$f(x) = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)) \quad (3)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)^x \quad (4)$$

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} \quad (5)$$

$$f(x) = x^{x^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt[x]{(1+x)^2} \quad (7)$$

(7) Spočtětě derivace a jednostranné derivace funkce v bodech, kde derivace není definovaná.

$$f(x) = |x| \quad (8)$$

$$f(x) = x|x| \quad (9)$$

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (10)$$

Nalezněte všechny lokální extrémů funkcí, vyšetřete jejich monotonii.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)} \quad (11)$$

$$f(x) = (2x-3)e^{-|x-1|} \quad (12)$$

Nalezněte všechny globální extrémů funkcí na daném intervalu.

$$f(x) = |x^2 - 4|; \quad x \in (-3, 5) \quad (13)$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{1+x} \right); \quad x \in \langle 0, 1 \rangle \quad (14)$$

10 Cvičení č. 10

Příklady z testů

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{(-3)^{n+1} + 5^{n+1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 - \sqrt[3]{-x}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3}{2 + a^n}; \quad a \in \mathbb{R} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)^n - 1}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{x - 2} \quad (8)$$

Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body následujících funkcí:

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2} \quad (9)$$

$$f(x) = x + \sin x \quad (10)$$

Nalezněte asymptoty grafu následujících funkcí:

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+3)} \quad (11)$$

$$f(x) = 2x - \arccos \frac{1}{x} \quad (12)$$

11 Cvičení č. 11

Příklady z testu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{3n+5} \right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{2-x}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{\ln(-3^x + 1)} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arccos \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{2x + 3} \quad (4)$$

Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

$$f(x) = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} \quad (6)$$

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{x} \quad (7)$$

12 Cvičení č. 11

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad (1)$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1} \quad (2)$$

$$f(x) = (x-1)e^{-|x-1|} \quad (3)$$