

# Metoda Monte Carlo - Cvičení IV (paralelka II) a domácí úlohy

## 1 Řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice - domácí úkol

### Příklad 1 - Vnitřní Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

Uvažujme následující úlohu:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x$$

na jednotkovém čtverci  $G = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$  s okrajovou podmínkou  $u|_S = f(x, y)$ , kde  $S$  je hraniční oblast  $G$ . Funkce  $f$ , která vyjadřuje okrajovou podmínku, je definovaná jako:

$$f(x, y) = \begin{cases} 3y - 1 & \text{pro } x = 0, \\ -y^2 - 9y + 3 & \text{pro } x = 1, \\ 4x - 1 & \text{pro } y = 0, \\ -9x + 2 & \text{pro } y = 1 \end{cases}$$

Přesné řešení této soustavy je

$$u(x, y) = 12(x - 1/4)(-y + 1/3) - xy^2$$

1. Metodou náhodné procházky po síti spočtete odhad  $u(0.5, 0.5)$  a  $u(0.2, 0.3)$  pro různé 3 hodnoty  $N$  (např.  $N = 10^2, 10^4, 10^6$  - případně menší/větší  $N$  podle výkonu vašeho počítače) a pro různé 2 hodnoty kroku sítě  $L$  (např.  $L = 10, 50$  - případně menší/větší  $L$  podle výkonu vašeho počítače). Celkem to je (pro každý bod)  $6 = 3 \times 2$  odhadů. Spočtete také vždy odhad směrodatné odchylky odhadu a skutečnou chybu odhadu. Výsledky shrňte do přehledné tabulky a i vlastními slovy.
2. Metodou náhodné procházky po síti spočtete odhad  $u(x, y)$  (alespoň) v bodech  $(x, y), x, y \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9, 1\}$  (tedy alespoň  $11 \times 11$  bodů). Krok sítě  $L$  a počet realizací  $N$  volte přiměřeně výkonu vašeho počítače, pokud možno  $L$  alespoň 20,  $N$  alespoň 100. Svou volbu  $L$  a  $N$  uveďte ve zprávě. Výsledky vložte do zprávy ve formě tabulky a případně i grafu. Pro srovnání přidejte do zprávy také tabulku nebo graf se skutečnými hodnotami  $u(x, y)$  v příslušných bodech. Shrňte výsledky vlastními slovy.

Pošlete zprávu (ve jednom z formátů .doc, .docx, .odt, .pdf, .xls, .xlsx, .ods či .txt) a zdrojové soubory programu (popř. i jeho výstupy). Povolené programovací jazyky jsou C, C++, Java, C#, Matlab (R2010), Pascal, Python.