

Metoda Monte Carlo - Cvičení IV (paralelka I) a domácí úlohy

1 Řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice - domácí úkol

Příklad 1 - Vnitřní Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

Uvažujme následující úlohu:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y$$

na jednotkovém čtverci $G = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ s okrajovou podmínkou $u|_S = f(x, y)$, kde S je hraniční oblast G . Funkce f , která vyjadřuje okrajovou podmínku, je definovaná jako:

$$f(x, y) = \begin{cases} -y - 1/3 & \text{pro } x = 0, \\ 3y + 2/3 & \text{pro } x = 1, \\ x - 1/3 & \text{pro } y = 0, \\ x^2 + 4x - 4/3 & \text{pro } y = 1 \end{cases}$$

Přesné řešení této soustavy je

$$u(x, y) = 3(x - 1/3)(y + 1/3) + x^2 y$$

1. Metodou náhodné procházky po síti spočtete odhad $u(0.5, 0.5)$ a $u(0.3, 0.7)$ pro různé 3 hodnoty N (např. $N = 10^2, 10^4, 10^6$ - případně menší/větší N podle výkonu vašeho počítače) a pro různé 2 hodnoty kroku sítě L (např. $L = 10, 50$ - případně menší/větší L podle výkonu vašeho počítače). Celkem to je (pro každý bod) $6 = 3 \times 2$ odhadů. Spočtete také vždy odhad směrodatné odchylky odhadu a skutečnou chybu odhadu. Výsledky shrňte do přehledné tabulky a i vlastními slovy.
2. Metodou náhodné procházky po síti spočtete odhad $u(x, y)$ (alespoň) v bodech (x, y) , $x, y \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9, 1\}$ (tedy alespoň 11×11 bodů). Krok sítě L a počet realizací N volte přiměřeně výkonu vašeho počítače, pokud možno L alespoň 20, N alespoň 100. Svou volbu L a N uveďte ve zprávě. Výsledky vložte do zprávy ve formě tabulky a případně i grafu. Pro srovnání přidejte do zprávy také tabulku nebo graf se skutečnými hodnotami $u(x, y)$ v příslušných bodech. Shrňte výsledky vlastními slovy.

Pošlete zprávu (ve jednom z formátů .doc, .docx, .odt, .pdf, .xls, .xlsx, .ods či .txt) a zdrojové soubory programu (popř. i jeho výstupy). Povolené programovací jazyky jsou C, C++, Java, C#, Matlab (R2010), Pascal, Python.