Metoda Monte Carlo - Cvičení I (paralelka II) a domácí úlohy

Výpočet určitého integrálu $J = \int_a^b f(x)dx$ pomocí metody Monte Carlo

Některé potřebné vzorečky

- Tato kapitolka není úplná, obsahuje pouze některé vzorečky.
- Detaily, odvození a notace viz poznámky ze cvičení nebo skripta k přednášce.

1. Metoda vzorkování plochy
   zvolit vhodnou mez c
   $\alpha_i \sim R(<a,b> \times <0,c>)$, $\xi_i = 1$ pk. $f(\alpha_{i1}) \leq \alpha_{i2}$
   $\theta_1 = \frac{c(b-a)}{N}\sum_{i=1}^N \xi_i$, N je počet realizací ξ
   $E\theta_1 = J$,
   $D\theta_1 = \frac{c^2(b-a)^2}{N^2}\sum_{i=1}^N D\xi_i = \frac{c^2(b-a)^2}{N}D\xi$, $D\xi$ lze odhadnout např. výběrovým rozptylem s^2 nebo podle definice $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$ odhadem $E\xi^2$ a $E\xi$
   $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N(\xi - E\xi)^2 = \frac{1}{N-1}(S_2 - \frac{(S_1)^2}{N}), S_2 = \sum_i \xi_i^2, S_i = \sum_i \xi_i$.
2. Metoda vzorkování funkce
   $\theta_2 = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^N f(\xi_i), \xi \sim R(a,b)$,
   $E\theta_2 = J$,
   $D\theta_2 = \frac{(b-a)^2}{N^2}\sum_{i=1}^N Df(\xi_i) = \frac{(b-a)^2}{N}Df(\xi) = \frac{(b-a)^2}{N}(Ef^2(\xi) - (Ef(\xi))^2)$, $Df(\xi)$ lze odhadnout např. výběrovým rozptylem nebo odhadem $Ef^2(\xi)$.
3. Metoda vzorkování funkce s vyjmutím hlavní části
   zvolit vhodnou funkci g
   $\theta_3 = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^N(f(\xi_i) - g(\xi_i)) + I, \xi \sim R(a,b)$, $I = \int_a^b g(x)dx$ známe
   $E\theta_3 = J$,
   $D\theta_3$ nechť každý spočte sám
4. Metoda vzorkování funkce se skupinovým výběrem
   zvolit vhodný počet intervalů m, vhodné l_k (délka intervalu) a N_k (počet realizací)
   $\theta_4 = \sum_{k=1}^m \frac{l_k}{N_K}\sum_{i=1}^{N_k} f(\xi_i^k), \xi^k \sim R(a_{k-1}, a_k)$, $l_k = (a_k - a_{k-1})$, N_k zvolíme, např. $N_k = \frac{l_k N}{b-a}$
   $D\theta_4 = \sum_k \frac{l_k^2}{N_K}Df(\xi^k)$
5. Integrály funkcí více proměnných
   $\theta_5 = \frac{\prod_j(b_j - a_j)}{N}\sum_{i=1}^N f(\xi_i)$,
   $E\theta_5 = J$,
   $D\theta_5 = \frac{\prod_j(b_j-a_j)^2}{N^2}\sum_{i=1}^N Df(\xi_i) = \frac{\prod_j(b_j-a_j)^2}{N}Df(\xi) = \frac{\prod_j(b_j-a_j)^2}{N}(Ef^2(\xi) - (Ef(\xi))^2)$,
   $Df(\xi)$ lze odhadnout např. výběrovým rozptylem nebo odhadem $Ef^2(\xi)$.

Program

1. Napište funkci v jazyce C, C++, Javě nebo C#, která spočte odhad integrálu $J = \int_a^b f(x)dx$ metodou vzorkování plochy. Napište také funkci, která spočte odhad rozptylu daného odhadu.
   double integral_plocha(double (∗ f)(double),double a, double b, double N)
   double integral_plocha_rozptyl(double (∗ f)(double),double a, double b, double N)

2. Napište funkci v jazyce C, C++, Javě nebo C#, která spočte odhad integrálu $J = \int_a^b f(x)dx$ metodou vzorkování funkce. Napište také funkci, která spočte odhad rozptylu daného odhadu.
   double integral_funkce(double (∗ f)(double),double a, double b, double N) double integral_funkce_rozptyl(double (∗ f)(double),double a, double b, double N)

3. Napište funkci v jazyce C, C++, Javě nebo C#, která spočte odhad integrálu $J = \int_a^b f(x)dx$ metodou vzorkování funkce s vyjmutím hlavní části. Napište také funkci, která spočte odhad rozptylu daného odhadu.
   double integral_funkce_vyjm(double (∗ f)(double),double (∗ g)(double), double I, double a, double b, double N)
   double integral_funkce_vyjm_rozptyl(double (∗ f)(double),double (∗ g)(double), double I, double a, double b, double N)

4. Napište funkci v jazyce C, C++, Javě nebo C#, která spočte odhad integrálu $J = \int_a^b f(x)dx$ metodou vzorkování funkce se skupinovým výběrem. Napište také funkci, která spočte odhad rozptylu daného odhadu.
   double integral_funkce_skup(double (∗ f)(double),double ∗ a, double ∗ N, double m)
   double integral_funkce_skup_rozptyl(double (∗ f)(double),double ∗ a, double ∗ N, double m)

5. Napište funkci v jazyce C, C++, Javě nebo C#, která spočte odhad vícerozměrného integrálu metodou vzorkování plochy. Napište také funkci, která spočte odhad rozptylu daného odhadu.
   double integral_funkce_dim(double (∗ f)(double ∗, int),double ∗ a, double ∗ b, double N, int dim)
   double integral_funkce_dim_rozptyl(double (∗ f)(double ∗, int),double ∗ a, double ∗ b, double N, int dim)

Příklady

1. $J = \int_0^4 (\sqrt{x} + 1)dx$. Metody 1,2,3,4.
2. $J = \int_0^1 (e^x + 2 * x)dx$. Metody 1,2,3,4.
3. $J = \int_0^{0.25} \int_0^{0.25} (8 - x^2 - y^2)dydx$. Metoda 5.

Pomocí implementovaných funkcí spočtěte odhady integrálů θ jednotlivými variantami metody Monte Carlo. Použijte různé hodnoty N $(10, 100, 10000, 1000000, 10000000)$. Spočtětě i odhad směrodatné odchylky s. Pokud je možné analyticky spočítat hodnotu integrálu J (stačí u zadání 1. a 2.), spočtětě i chybu $\delta = |\theta - J|$.

- Napište funkce v jazyce C, C++, Javě nebo C#, které příslušné hodnoty θ a s pro jednotlivá N spočtou a vypíšou na standardní výstup nebo do souboru (dle vlastního uvážení):
  void priklad_1(),
  void priklad_2(),
  void priklad_3(),
  Program nemusí mít hezky formátovaný výstup.

Výsledky shrňte do textového souboru, který pošlete společně s programem. Výsledky pro každý příklad a metodu shrňte do přehledné tabulky se sloupci N, θ, s (pro příklady 1. a 2. i δ) a napište stručné zhodnocení dosažených výsledků. U metod 1), 3) a 4) zvolte vhodné parametry (parametr c, funkce g,...) a uveďte svou volbu.